

U N I V E R Z A V L J U B L J A N I

Fakulteta za elektrotehniko

France Mihelič in Vitomir Štruc

SKRIPTA ZA PREDMET

ANALIZA SIGNALOV

NA ŠTUDIJSKEM PROGRAMU
APLIKATIVNA ELEKTROTEHNIKA NA 1. STOPNJI VS
UL FE

PRVA IZDAJA

Ljubljana, 2012

Predgovor

Ta skripta so nastala iz prosojnic, uporabljenih na predavanjih pri predmetu *Analiza signalov* na 1. stopnji VS študijske smeri Aplikativna elektrotehnika na Fakulteti za elektrotehniko Univerze v Ljubljani v letih od 2011 do 2012.

Skripta na strnjen način predstavljajo vsebino predmeta *Analiza signalov*. Predstavljeni so osnovni pojmi in matematična orodja, ki se uporabljajo na področju obdelave oz. analize signalov. Skripta so nastala po knjigah:

- Mihelič F., *Signali*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2006, in
- Mihelič F., Gyergyek L., Ebenšpanger T., *Signali - Priročnik z zbirko rešenih nalog, dopolnjena izdaja*, Založba FE in FRI, 3 izdaja, Ljubljana, 2009.

Kazalo

1	Uvod	3
2	Izražava signalov s temeljnimi funkcijami	12
3	Frekvenčna analiza periodičnih signalov	40
4	Korelacija periodičnih signalov	52
5	Frekvenčna analiza neperiodičnih signalov	64
6	Nekatere lastnosti Fourierjeve in Inverzne Fourierjeve transformacije	74
7	Korelacija in kovolucija neperiodičnih signalov	84
8	Obdelava naključnih signalov	107
9	Digitalni signali	121

1 Uvod

V tem poglavju spoznamo nekaj osnovnih definicij povezanih s signali in teorijo analize oz. obdelave signalov. Seznanimo se z različnimi vrstami signalov in si ogledamo njihove osnovne lastnosti. Definiramo energijo in povprečno moč signala ter predstavimo posledice takšne definicije. Na koncu poglavja se spoznamo še z osnovnimi principi numerične obdelave signalov.

Poglavje predstavi:

- osnovne definicije, pomembne za področje teorije signalov,
- vrste signalov in njihove lastnosti,
- energijo in povprečno moč signala, in
- osnove numerične obdelave signalov.

Osnovni pojmi

SIGNALI (tujka iz latinske besede *signum*)

Znaki ali signali nosilci informacij:

- kretnje,
- govorica,
- druga znamenja

Sprejemnik oddajnik:

- sluh,
- vid,
- govorila,
- okončine,
- ...

Električni signali:

Pričetek obravnave v sredi 19. stoletja, začetku 20. stoletja:

iznajdba telegrafa, telefona, radia, televizije, digitalnih sistemov, ...

Signale je bilo možno opazovati, zapisovati, kar je omogočilo tudi njihovo matematično modeliranje in matematično obdelavo.

Osnovne definicije

Teorija signalov:

Študij sprememb signalov kot nosilcev sporočil in informacij od svojih izvorov preko sistemov za oddajanje in sprejemanje.

Definicija:

Signal - je fizikalna tvorba s katero je moč prenašati sporočila vzdolž določenega okolja.

Šum - motilni pojav (posebna vrsta signala)

Naloga teorije signalov:

Matematično opisovanje signalov in študij njihovih lastnosti.

Vrste signalov

- **Fizikalno realni signali**

Lastnosti:

- omejena energija,
- omejena amplituda,
- amplituda je zvezna funkcija časa (vztrajnost sistema?)
- frekvenčni spekter omejen.

- **Teoretični modeli signala**

Realna ali kompleksna funkcija ene realne spremenljivke (največkrat časa).

Modele je smiselno zasnovati poenostavljeno in preprosto.

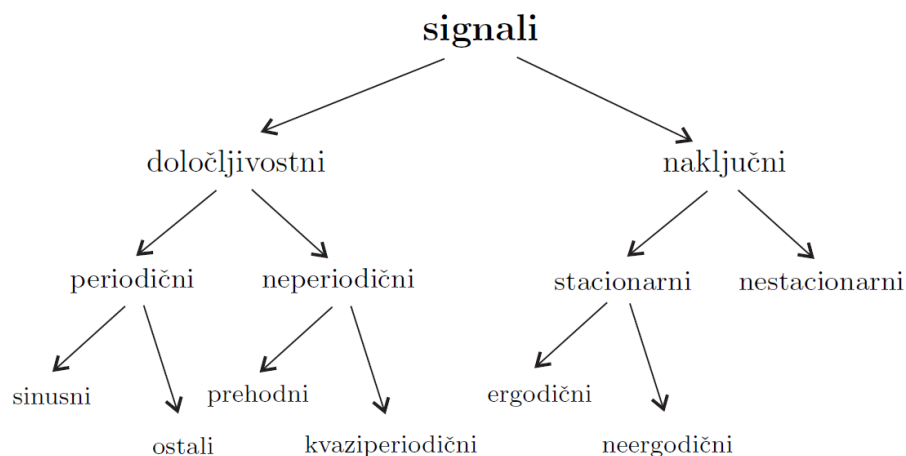
Nimajo nujno omejitev, ki jih nalaga fizikalna stvarnost.

Primeri:

- signali z neomejeno energijo, močjo, amplitudo,
- nezvezni signali,
- signali definirani na celi časovni osi,
- ...

Delitve teoretičnih modelov signalov

- **Določljivostni** - Odvisnost amplitude od časa je matematično natanko in enolično določena.
Pojem funkcija.
- **Naključni** - Obnašanje v odvisnosti od časa je nepredvidljivo.
Poznamo le preteklost, amplitude signala v prihodnosti ne moremo natanko določiti.



Periodični in neperiodični signali

- Periodični signali

Signal $f(t)$ je periodičen natanko takrat, ko je za vsako vrednost časa t izponjena enačba

$$f(t + T) = f(t) ,$$

kjer je T različen od 0 ($T \neq 0$).

Konstanta T je **perioda** signala $f(t)$. Če je signal periodičen ima neskončno različnih period. Najmanjšo pozitivno periodo signala $f(t)$ imenujemo **osnovna perioda**.

- Neperiodični signali

Signal je neperiodičen, če ni periodičen.

Stacionarni naključni signali

- Verjetnostna porazdelitev možnih vrednosti amplitud signala je neodvisna od časa.

Primer:

Verjetnost, da bo stacionarni naključni signal ob času $t = 5$ min zavzel vrednost 3, je enaka verjetnosti, da bo signal to vrednost zavzel ob kateremkoli drugem času t . Npr. času $t = 6$ min, $t = 100$ min ali $t = 3600$ min.

$$P(f(5) = 3) = P(f(6) = 3) = P(f(100) = 3) = P(f(3600) = 3) = P(f(t) = 3)$$

Energija in povprečna moč signala na omejenem časovnem intervalu (t_1, t_2)

- Trenutna moč $p(t)$ električnih signalov $i(t)$ in $v(t)$:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = 1/R \cdot v^2(t)$$

- Trenutna moč $p_f(t)$ poljubnega signala $f(t)$:

$$p_f(t) = |f(t)|^2$$

- Energija

$$E_f(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

- Povprečna moč

$$P_f(t_1, t_2) = \frac{E_f(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

Energija in povprečna moč signala preko cele časovne osi

- Energija E_f

$$E_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$$

Signal $f(t)$ je energijski, če limita obstaja in je končna:

$$E_f < \infty$$

- Povprečna moč P_f

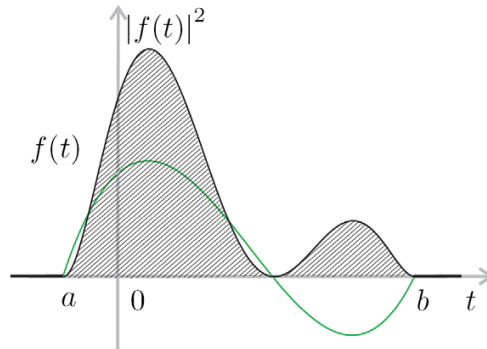
$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$$

- Signal $f(t)$ je močnosten, če limita obstaja in je končna ter pozitivna:

$$0 < P_f < \infty$$

Posledice

- Časovno omejeni signali z omejeno amplitudo so energijski.



- Potrební pogoj za to, da je signal energijski, je lastnost $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$
- Povprečna moč signalov, ki so energijski, je enaka 0.

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_f}{2T} = E_f \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0$$

Posledice

- Periodični signali niso energijski.
 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$ ne obstaja. Periodični signali so običajno močnostni.

- Stacionarni naključni signali niso energijski.

Ni izpolnjena lastnost $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$.

Za naključne signale bi to pomenilo, da mora veljati $P(f(\pm\infty) = 0) = 1$.

Zaradi stacionarnosti pa to pomeni $P(f(t) = 0) = 1$, od koder sledi:

$$f(t) = 0 \text{ .}$$

Posledice

- Povprečno moč periodičnih signalov lahko določimo tudi iz

$$P_f = \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt ,$$

kjer je trenutek t_1 poljuben in T_i katerakoli pozitivna perioda signala $f(t)$.

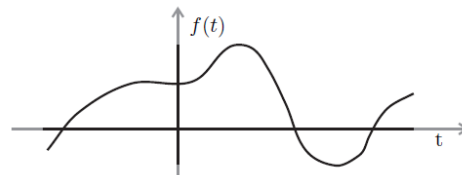
- Primer za dvakratnik periode

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T_i} \int_{t_1}^{t_1+2T_i} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt + \frac{1}{T_i} \int_{t_1+T_i}^{t_1+2T_i} |f(t)|^2 dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt \right\} = \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt \end{aligned}$$

Zvezni in diskretni signali

- Zvezni signal $f(t)$**

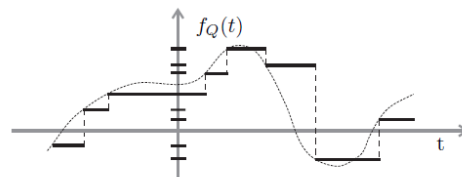
Amplituda signala je zvezna funkcija (enakost leve in desne limite pri vsaki vrednosti z definicijskega območja signala). S tem tudi privzamemo, da sta definicijsko območje in zaloga vrednosti signala zvezni področji (cela realna os, poltrak ali interval).



- Kvantificirani signal $f_Q(t)$**

Nezvezni po amplitudi

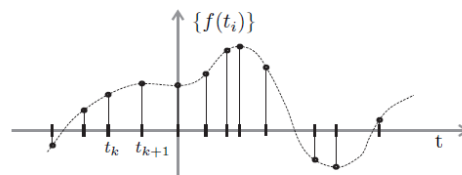
Zaloga vrednosti je diskretna (števna) in občajno tudi končna množica.



- Vzorčeni signal $\{f(t_i)\}$**

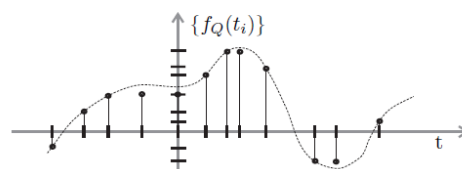
Nezvezni po času.

Definicijsko območje je diskretna množica.



- Digitalni signal $\{f_Q(t_i)\}$**

Vzorčen in kvantificiran signal.



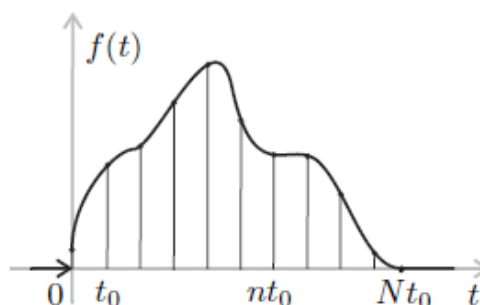
Numerična obdelava signalov

- Pri laboratorijskih vajah bo potrebno nekatere predstavljene postopke obdelave signalov udejaniti na realnih signalih (zvok, slika), ki jih boste pridobili v digitalni obliki.

$$f(t) \rightarrow \{f(nt_0)\}$$

t_0 – interval vzorčenja

n – celo število



- Zato bo potrebno za nekatere analitične postopke uporabiti numerične približke, največkrat bo šlo pri tem za numerično integriranje.

Numerična obdelava signalov

- Za oceno vrednosti $\int_{kt_0}^{lt_0} f(t)dt$ bomo uporabili najenostavnejši pristop, kjer nadomestimo

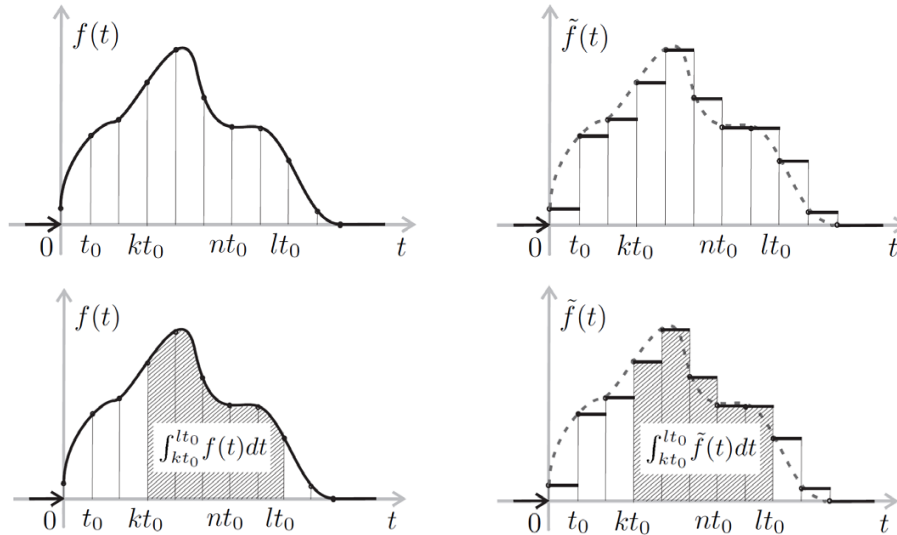
$$\begin{aligned} dt &\longrightarrow t_0, \\ t &\longrightarrow nt_0, \\ \int &\longrightarrow \sum \end{aligned}$$

in dobimo

$$\int_{kt_0}^{lt_0} f(t)dt \approx \sum_{n=k}^{l-1} f(nt_0) \cdot t_0$$

Numerična obdelava signalov

- Tak način določanja približne vrednosti določenega integrala, pomeni, da izračunamo določen integral signalu $f(t)$ prirejene odsekoma konstantne funkcije $\tilde{f}(t)$



2 Izražava signalov s temeljnimi funkcijami

V tem poglavju se ukvarjamo z izražavo/aproksimacijo signalov z linearno kombinacijo temeljnih funkcij. Ogledamo si splošen potek postopka izražave, posebno pozornost pa namenimo primeru, ko imamo opravka s ortogonalnimi temeljnimi funkcijami. Seznanimo se s kriteriji merjenja kvalitete približka in predstavimo primere ortogonalnih temeljnih funkcij.

Poglavje obravnava:

- izražavo signalov z linearno kombinacijo temeljnih funkcij,
- zapis približka signala z linearno kombinacijo temeljnih funkcij,
- merjenje kvalitete približka s srednjo kvadratno napako,
- ortogonalnost temeljnih funkcij,
- polnost zaporedja temeljnih funkcij,
- izbrane primere ortogonalnih temeljnih funkcij
 - Walsheve temeljne funkcije,
 - Haarove temeljne funkcije,
 - ortogonalne polinome, in
 - sinusne temeljne funkcije.

Uvodni primer

- Problem:

Za signal $x(t)$ želimo na končnem časovnem intervalu (t_1, t_2) poiskati njegov približek $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) \approx x(t), \quad t_1 < t < t_2$$

Približek $\tilde{x}(t)$ določimo kot

$$\tilde{x}(t) = C \phi(t), \quad t_1 < t < t_2$$

Kako izmeriti kvaliteto približka?

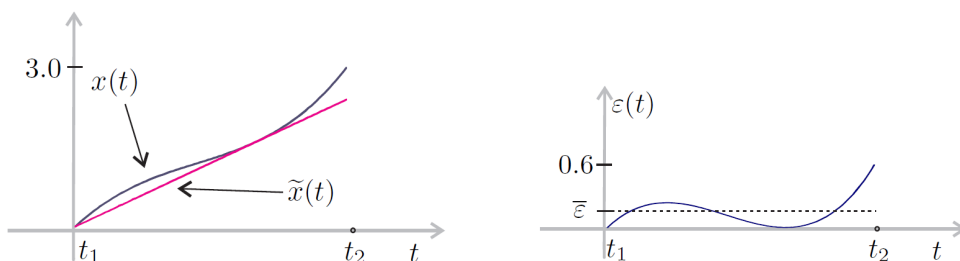
Kriteriji določimo na podlagi poteka signala napake $\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t), \quad t_1 < t < t_2$$

Uvodni primer

Kot kriterij za kvaliteto približka potrebujemo številsko oceno, ki je odvisna od vseh vrednosti $\varepsilon(t)$ na intervalu (t_1, t_2) .

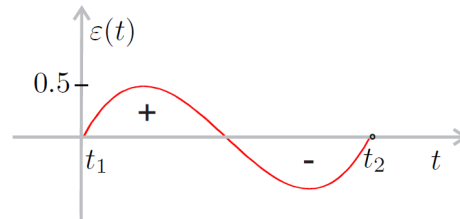
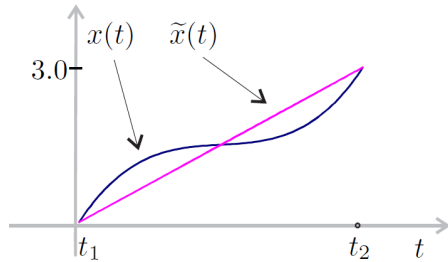
Povprečna vrednost $\varepsilon(t)$?



$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t) dt$$

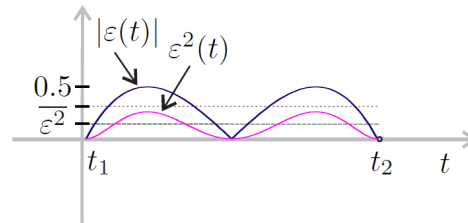
Uvodni primer

Napake se lahko med sabo odšteva (pozitivna in negativna odstopanja), kar ima lahko za posledico majhno povprečno vrednost kljub velikim odstopanjem.



$$\overline{|\varepsilon(t)|} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)| dt$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt$$



Uvodni primer

Vzemimo: $\tilde{x}(t) = C \phi(t)$

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - \tilde{x}(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - C \phi(t))^2 dt = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - 2C \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt + C^2 \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \right\} \end{aligned}$$

Najmanjšo vrednost bomo dobili, ko bo $\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(t)}}{\partial C} = 0$.

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(t)}}{\partial C} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ -2 \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt + 2C \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \right\}$$

Uvodni primer

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\overset{\dots\dots\dots}{\partial \varepsilon^2(t)}}{\partial C} \\
 0 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ -2 \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt + 2C \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \right\} \\
 0 &= - \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt + C \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \\
 C &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt} .
 \end{aligned}$$

Uvodni primer

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt} & K &= \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \\
 \overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon^2(t)} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - 2C \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt + C^2 \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \right\} \\
 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - 2CCK + C^2K \right\} \\
 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - C^2K \right\} .
 \end{aligned}$$

Zgled

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

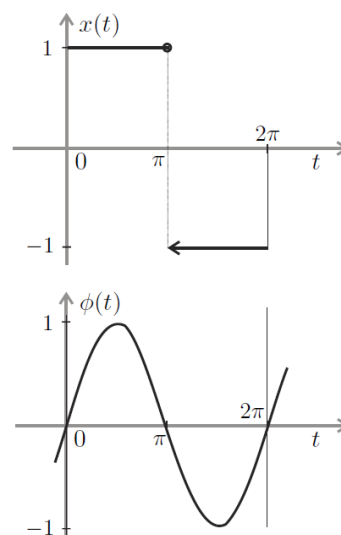
$$\phi(t) = \sin t$$

Za signal $x(t)$ na intervalu $0 < t < 2\pi$ določi približek v obliki

$$\tilde{x}(t) = C \phi(t)$$

tako, da bo njegova srednja kvadratna napaka najmanjša.

Določi tudi velikost in skiciraj potek približka.



Zgled

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt} = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt}.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \left. \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right|_0^{2\pi} = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} x(t) \sin t dt = \int_0^{\pi} \sin t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t dt = -\cos t \Big|_0^{\pi} + \cos t \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$$

$$C = \frac{4}{\pi} \doteq 1,273 \qquad \tilde{x}(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$$

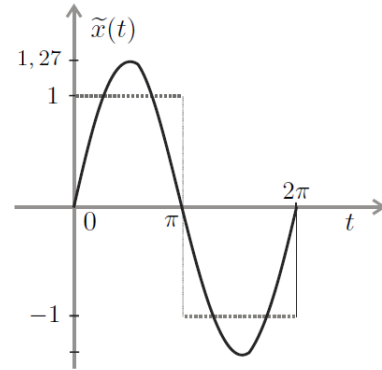
Zgled

Določanje srednje kvadratne napake:

$$K = \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - C^2 K \right\}$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} 1 dt - \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \pi \right\} = \dots = 1 - \frac{8}{\pi^2} \doteq 0,189$$



Ali je vrednost 0,189 velika?

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1 \quad \frac{\overline{\varepsilon^2(t)}}{P_x} \cdot 100 = 19\%$$

Zgled

Ali je približek „ustrezen“?

„Ustreznost“ približka določa namen uporabe.

Velikokrat lahko za določeno uporabo ustreznost približka ovrednotimo z velikostjo ali relativno velikostjo srednje kvadratne napake in določen približek $\tilde{x}(t)$ signala $x(t)$ sprejmemo kot zadovoljiv, če je pripadajoča vrednost srednje kvadratne napake manjša od neke kritične vrednosti α :

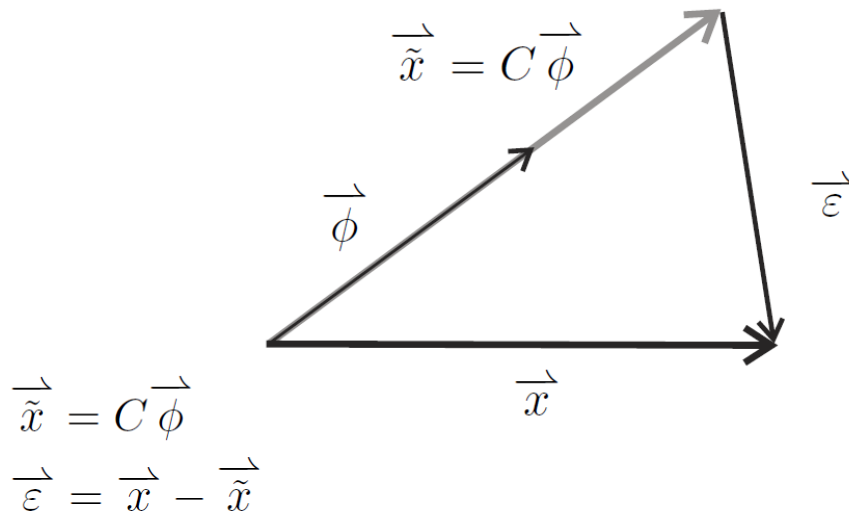
$$\overline{\varepsilon^2(t)} < \alpha$$

Pri slepem izbiranju kandidatov funkcij $\Phi_i(t)$ za določanje približka nimamo nobenega zagotovila, da bomo v končnem številu poizkusov dosegli dovolj majhno vrednost srednje kvadratne napake.

Za določanje približka, ki temelji na kriteriju najmanjše srednje kvadratne napake, potrebujemo postopek izbire, ki nas bo v končnem številu korakov pripeljal do ustrezne rešitve.

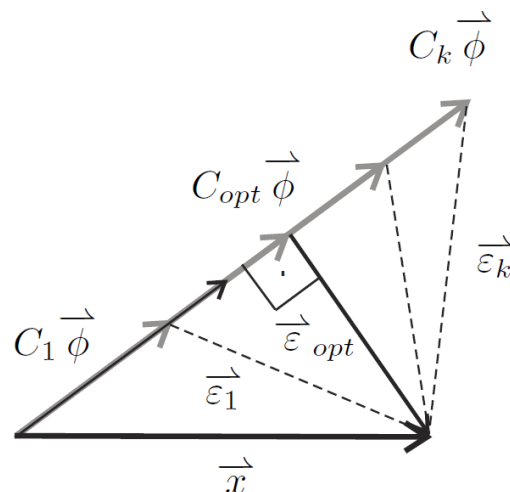
Vektorski prostor signalov

Dvorangežni evklidski vektorski prostor



Vektorski prostor signalov

Za katero vrednost skalarja C bo vektor $\vec{\varepsilon}$ najkrajši?



Takrat, ko bosta vektorja $C \vec{\phi}$ in $\vec{\varepsilon}$ pravokotna.

Vektorski prostor signalov

V vektorskem prostoru, v katerem je definiran skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sta dva neničelna vektorja pravokotna oziroma ortogonalna natanko takrat, ko je njun skalarni produkt enak 0:

$$\langle \vec{\varepsilon}, C\vec{\phi} \rangle = 0.$$

$$0 = \langle \vec{\varepsilon}, C\vec{\phi} \rangle = \langle \vec{x} - C\vec{\phi}, C\vec{\phi} \rangle = \langle \vec{x}, C\vec{\phi} \rangle - \langle C\vec{\phi}, C\vec{\phi} \rangle$$

$$0 = C\langle \vec{x}, \vec{\phi} \rangle - C^2\langle \vec{\phi}, \vec{\phi} \rangle$$

$$C = 0 \quad \text{nezanimiva rešitev}$$

$$C = \frac{\langle \vec{x}, \vec{\phi} \rangle}{\langle \vec{\phi}, \vec{\phi} \rangle}$$

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt}$$

Vektorski prostor signalov

Ali množico vseh signalov, ki so določeni na intervalu (t_1, t_2) in imajo končno energijo, lahko razumemo kot vektorski prostor?

Množico označimo z $L^2_{(t_1, t_2)}$.

- Množica je **vektorski prostor**, če je mogoče v njej definirati:
 - vsoto med elementi množice in
 - množenje elementov množice s skalarjem.
- Elemente vektorskega prostora imenujemo **vektorji**.

Vsota dveh signalov je zopet signal: $x(t) + y(t) = z(t)$

Produkt signala s konstanto je znova signal: $\alpha x(t) = g(t)$

- $L^2_{(t_1, t_2)}$ je vektorski prostor.

Vektorski prostor signalov

- V prostoru $L^2_{(t_1, t_2)}$ lahko definiramo skalarni produkt:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{y(t)} dt$$

- Skalarni produkt je relacija, ki dvema vektorjema priredi skalar

$$\langle x(t), y(t) \rangle \in \mathbb{C}$$

in izpolnjuje naslednje lastnosti:

$$\begin{aligned}\langle x(t), y(t) \rangle &= \overline{\langle y(t), x(t) \rangle} , \\ \langle \alpha x(t), y(t) \rangle &= \alpha \langle x(t), y(t) \rangle , \\ \langle x_1(t) + x_2(t), y(t) \rangle &= \langle x_1(t), y(t) \rangle + \langle x_2(t), y(t) \rangle , \\ \langle x(t), x(t) \rangle = 0 &\iff x(t) = 0 .\end{aligned}$$

Vektorski prostor signalov

Skalarni produkt realnih signalov lahko zapišemo kot

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y(t) dt$$

in zato tudi relacijo

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt}$$

lahko zapišemo kot

$$C = \frac{\langle x(t), \phi(t) \rangle}{\langle \phi(t), \phi(t) \rangle}$$

Vektorski prostor signalov

- V vektorskem prostoru, kjer lahko določimo skalarni produkt, lahko določimo tudi normo vektorja in razdaljo med vektorji:

$$\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$$

$$d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|$$

$$d^2(x(t), y(t)) = \langle x(t) - y(t), x(t) - y(t) \rangle$$

- Kvadrat norme (velikosti) signala lahko razumemo kot energijo signala

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

Vektorski prostor signalov

$$\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = d^2(x(t), \tilde{x}(t))$$

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \|\varepsilon(t)\|^2$$

Razlika med $\overline{\varepsilon^2(t)}$ in $\|\varepsilon(t)\|^2$ je le v konstantnem faktorju $\frac{1}{t_2 - t_1}$.

- Če iščemo približek, ki nam da najmanjšo vrednost $\overline{\varepsilon^2(t)}$ to pomeni tudi, da iščemo tak približek, da bo razdalja $d(x(t), \tilde{x}(t))$ med signalom in njegovim približkom najmanjša.

Izražava signalov z linearno kombinacijo temeljnih funkcij

$$\tilde{x}(t) \approx x(t) \quad t_1 < t < t_2$$

Tri osnovna vprašanja:

1. S kakšnim namenom želimo določiti $\tilde{x}(t)$?
2. V kakšni obliki bomo predstavili približek?
3. Kako bomo vrednotili kvaliteto približka?

Ad. 1

- “Velika” numerična zahtevnost določanja amplitud originalnega signala.
- Originalni signal ne poseduje zahtevanih analitičnih lastnosti (npr. zveznost, odvedljivost, ...), ki so nujno potrebne za izvedbo postopka.
- Z uvedbo približka želimo poudariti oziroma modelirati nekatere specifične fizikalne lastnosti signala, ki so za analizo lastnosti signala oziroma za nadaljnji postopek obdelave pomembne.

Izražava signalov z linearno kombinacijo temeljnih funkcij

Ad. 2

- Največkrat je približek potrebno sestaviti iz več vnaprej podanih funkcij na način, ki bo glede na zastavljeni kriterij zagotavljal dovolj dober rezultat.

$$\tilde{x}(t) = f(\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

- Funkcije, ki sestavljajo približek, imenujemo **temeljne funkcije**.
- Eden najenostavnejših načinov oblikovanja približka, ki omogoča tudi uporabo predstavitve signalov v smislu vektorskega prostora in uporabo linearne algebre, je **linearna kombinacija temeljnih funkcij**:

$$\tilde{x}(t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \dots + C_n\phi_n(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i\phi_i(t)$$

Tak način določanja približka bomo uporabili v nadaljnjih izpeljavah.

Izražava signalov z linearno kombinacijo temeljnih funkcij

Ad. 3

- Kriterij določanja kvalitete približka direktno vpliva na izbiro optimalnega približka kot tudi na sam postopek njegovega določanja.
- Največkrat uporabimo kriterij srednje kvadratne napake:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt$$

- Druge možnosti:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)| dt \qquad \sup_{t_1 < t < t_2} \varepsilon(t)$$

- Ker $\overline{\varepsilon^2(t)}$ odraža povprečno moč signala napake $\varepsilon(t)$ in ker v tem primeru pri določanju približkov lahko uporabimo predstavitev v vektorskem prostoru signalov, bomo v nadaljnjem izvajanju za kriterijsko funkcijo pri določanju optimalne izbire približka uporabili prav srednjo kvadratno napako oziroma ekvivalentno mero $\|\varepsilon(t)\|^2$.

Izražava signalov z linearno kombinacijo temeljnih funkcij

Osnovni izrek

Predpostavimo, da približek izrazimo z linearno kombinacijo temeljnih funkcij

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t)$$

in da za določitev kvalitete približka izberemo kriterij

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = d^2(x(t), \tilde{x}(t)) .$$

- Vrednost $\|\varepsilon(t)\|^2$ je najmanjša, če je signal napake

$$\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

ortogonalen na vse temeljne funkcije $\phi_i(t)$, ki sestavljajo približek:

$$\langle \varepsilon(t), \phi_i(t) \rangle = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n .$$

Za dokaz glej učbenik *Signali* str. 29.

Določanje srednje kvadratne napake

Privzemimo, da smo določili optimalen približek.

Izpeljati je mogoče (glej učbenik Signali str. 30):

$$\| \varepsilon(t) \|^2 = \| x(t) \|^2 - \| \tilde{x}(t) \|^2$$

Posplošitev Pitagorovega izreka za vektorski prostor signalov

$$\begin{aligned} \| \varepsilon(t) \|^2 &= \| x(t) \|^2 - \langle \tilde{x}(t), \tilde{x}(t) \rangle \\ &= \| x(t) \|^2 - \left\langle \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t), \sum_{j=1}^n C_j \phi_j(t) \right\rangle \\ &= \| x(t) \|^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i \overline{C_j} \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle \\ \dots\dots\dots \varepsilon^2(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \| x(t) \|^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i \overline{C_j} \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle \right\} \end{aligned}$$

Določanje optimalne vrednosti koeficientov C_i

Na osnovi veljavnosti osnovnega izreka lahko pridobimo nehomogen sistem n linearnih enačb za n koeficientov C_i (glej učbenik Signali str. 31)

$$C_1 \langle \phi_1(t), \phi_1(t) \rangle + C_2 \langle \phi_2(t), \phi_1(t) \rangle + \dots + C_n \langle \phi_n(t), \phi_1(t) \rangle = \langle x(t), \phi_1(t) \rangle$$

$$C_1 \langle \phi_1(t), \phi_2(t) \rangle + C_2 \langle \phi_2(t), \phi_2(t) \rangle + \dots + C_n \langle \phi_n(t), \phi_2(t) \rangle = \langle x(t), \phi_2(t) \rangle$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

$$C_1 \langle \phi_1(t), \phi_n(t) \rangle + C_2 \langle \phi_2(t), \phi_n(t) \rangle + \dots + C_n \langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle = \langle x(t), \phi_n(t) \rangle$$

Sistem lahko predstavimo tudi v matrični obliki: $\mathbf{\Lambda} \vec{C} = \vec{b}$

- Sistem je rešljiv in ima eno samo rešitev v primeru, ko je matrika, ki jo sestavljajo skalarni produkti, obrnljiva:

$$\vec{C} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \vec{b}.$$

- To res natanko takrat, ko so temeljne funkcije $\phi_i(t)$, ki sestavljajo približek, linearno neodvisne.

Določanje optimalne vrednosti koeficientov C_i

To je tudi smiselna zahteva za izbiro temeljnih funkcij. V primeru, ko bi končnemu zaporedju $n-1$ temeljnih funkcij dodali novo funkcijo, ki bi bila od prejšnjih linearno odvisna pri kvaliteti približka nič ne pridobimo.

- Za določitev optimalne zgradbe približka je potrebno rešiti nehomogen sistem linearnih enačb.
- Z dodajanjem novih temeljnih funkcij v približek se zahtevnost računskega postopka povečuje.

Ortogonalnost temeljnih funkcij

Naj za zaporedje $\{\phi_i(t)\}$ velja lastnost:

$$\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i, & i = j. \end{cases}$$

$$K_i = \langle \phi_i(t), \phi_i(t) \rangle = \|\phi_i(t)\|^2 > 0$$

- V tem primeru zaporedje $\{\phi_i(t)\}$ imenujemo **ortogonalno zaporedje temeljnih funkcij** oziroma pravimo, da so temeljne funkcije $\phi_i(t)$ med sabo **ortogonalne** ali **pravokotne**.
- Če za ortogonalno zaporedje temeljnih funkcij za vsak i velja $K_i = 1$, pravimo, da je zaporedje **ortonormalno**.

Določanje koeficientov približka pri uporabi ortogonalnih temeljnih funkcij

$$\sum_{i=1}^n C_i \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = C_j \langle \phi_j(t), \phi_j(t) \rangle = C_j K_j$$

$$C_j K_j = \langle x(t), \phi_j(t) \rangle \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$C_j = \frac{\langle x(t), \phi_j(t) \rangle}{K_j}.$$

$$C_j = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{\phi_j(t)} dt, \quad K_j = \int_{t_1}^{t_2} |\phi_j(t)|^2 dt$$

Določanje vrednosti srednje kvadratne napake pri uporabi ortogonalnih temeljnih funkcij

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i \overline{C_j} \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \sum_{i=1}^n C_i \overline{C_i} \langle \phi_i(t), \phi_i(t) \rangle = \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i,$$

$$\varepsilon^2(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \|x(t)\|^2 - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i \right\}$$

$$\varepsilon^2(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i \right\}$$

Nač in izražave in kriterij kvalitete približka

$$\tilde{x}(t) \approx x(t), \quad t_1 < t < t_2$$

Å Približek izrazimo z linearno kombinacijo temeljnih funkcij

$$\tilde{x}(t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \dots + C_n\phi_n(t)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i\phi_i(t)$$

Å Kriterij kvalitete približka je srednja kvadratna napaka

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt$$

$$\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t), \quad t_1 < t < t_2$$

Ortogonalnost temeljnih funkcij

$\{\phi_i(t)\}$ je **ortogonalno** zaporedje temeljnih funkcij, natanko takrat, ko je izpolnjena lastnost:

$$\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i, & i = j. \end{cases}$$

$$K_i = \langle \phi_i(t), \phi_i(t) \rangle = \|\phi_i(t)\|^2 > 0$$

Če za ortogonalno zaporedje temeljnih funkcij za vsak i velja $K_i = 1$, pravimo, da je zaporedje **ortonormalno**.

Določanje približka $\tilde{x}(t)$ in vrednost $\varepsilon^2(t)$ z uporabo ortogonalnih temeljnih funkcij

$$C_j = \frac{\langle x(t), \phi_j(t) \rangle}{K_j}$$

$$C_j = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{\phi_j(t)} dt, \quad K_j = \int_{t_1}^{t_2} |\phi_j(t)|^2 dt$$

$$\varepsilon^2(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i \right\}$$

Neodvisnost koeficientov C_i

$$C_j = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{\phi_j(t)} dt$$

Vrednost koeficienta C_j v približku odvisna le od signala $x(t)$ in temeljne funkcije $\bar{u}_j(t)$.

Å To pomeni, da so vrednosti koeficientov C_i , ki določajo približek, so med sabo neodvisne.

Å Če določimo eno vrednost koeficientov ni potrebno ponovno določiti, ko v približek dodamo novo temeljno funkcijo.

Polnost zaporedja temeljnih funkcij

$$\begin{aligned}\varepsilon_n^2(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i \right\} \\ \varepsilon_{n+1}^2(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i - K_{n+1} |C_{n+1}|^2 \right\} \\ &= \varepsilon_n^2(t) - \frac{K_{n+1} |C_{n+1}|^2}{t_2 - t_1} . \\ \varepsilon_n^2(t) &\geq \varepsilon_{n+1}^2(t)\end{aligned}$$

$\{\varepsilon_n^2(t)\}$ je navzdol omejeno monotono padajoč e zaporedje.

Polnost zaporedja temeljnih funkcij

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^2(t) = a$$

S stalič a določ anja pribličkov je najbolj ugodno, če pri danem ortogonalnem zaporedju temeljnih funkcij $\{\bar{u}_i(t)\}$ za vsak signal $\mathbf{x}(t)$ iz vektorskega prostora signalov s konč no energijo na intervalu (t_1, t_2) velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^2(t) = 0 .$$

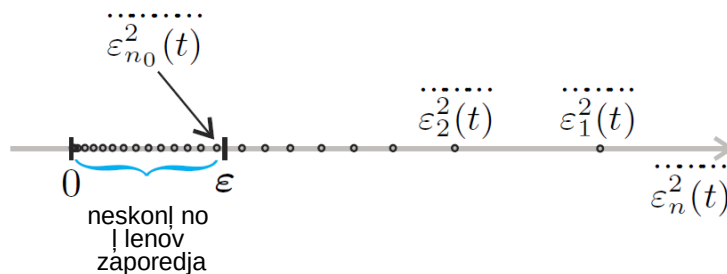
Tako zaporedje temeljnih funkcij imenujemo **polno zaporedje** oziroma pravimo, da zaporedje temeljnih funkcij izpolnjuje **pogoj polnosti** .

Za polno zaporedje temeljnih funkcij velja, da lahko s pribličkom, ki je določ en s konč nim čtevilom temeljnih funkcij n_0 , presečemo vsako konč no vnaprej predpisano vrednost srednje kvadratne napake $\varepsilon > 0$.

$$n > n_0 \implies 0 \leq \varepsilon_n^2(t) < \varepsilon$$

Polnost zaporedja temeljnih funkcij

Za polno zaporedje temeljnih funkcij velja, da lahko s približkom, ki je določen s končnim številom temeljnih funkcij n_0 , presežemo vsako končno vnaprej predpisano vrednost srednje kvadratne napake $\varepsilon > 0$.



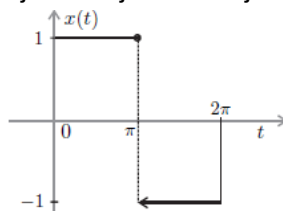
$$n > n_0 \implies 0 \leq \varepsilon_n^2(t) < \varepsilon$$

Zaporedja temeljnih funkcij Primer

Ali sploh obstaja kakšno neskončno polno zaporedje ortogonalnih funkcij?

DA!

Primer: $\{\sin(2n-1)t\} = \{\sin t, \sin 3t, \sin 5t, \dots\}$
 Ortogonalno zaporedje temeljnih funkcij na intervalu $(0, 2\pi)$.



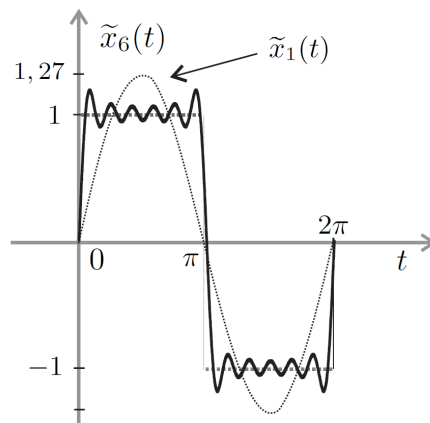
Za signal $x(t)$ določimo približek sestavljen iz prvih 6-ih temeljnih funkcij $\tilde{x}_6(t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \dots + C_6\phi_6(t)$.
 Ugotovimo tudi n_0 najmanjše število prvih temeljnih funkcij, da velja $\varepsilon_{n_0}^2(t) < 0,0001$.

Zaporedja temeljnih funkcij Primer

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{K_n} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(2n-1)t \, dt \\
 &= \frac{1}{K_n} \int_0^{\pi} \sin(2n-1)t \, dt - \frac{1}{K_n} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(2n-1)t \, dt \\
 K_n &= \int_0^{2\pi} \sin^2(2n-1)t \, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2(2n-1)t}{4(2n-1)} \right]_0^{2\pi} = \pi \\
 C_n &= \frac{1}{\pi(2n-1)} \left\{ -\cos(2n-1)t \Big|_0^{\pi} + \cos(2n-1)t \Big|_{\pi}^{2\pi} \right\} = \frac{4}{\pi(2n-1)}
 \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{4}{\pi}, C_2 = \frac{4}{3\pi}, \dots, C_6 = \frac{4}{11\pi}$$

Zaporedja temeljnih funkcij Primer



$$\tilde{x}_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$$

$$\tilde{x}_6(t) = \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \sin 5t + \frac{4}{7\pi} \sin 7t + \frac{4}{9\pi} \sin 9t + \frac{4}{11\pi} \sin 11t$$

Zaporedja temeljnih funkcij Primer

$$\overset{\dots\dots}{\varepsilon_n^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n K_i |C_i|^2 \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\pi - \sum_{i=1}^n \pi \left(\frac{4}{\pi(2n-1)} \right)^2 \right\}$$

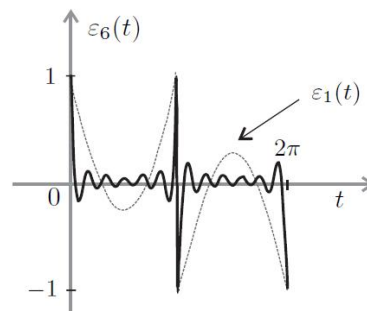
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2n-1)^2} \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\dots\dots}{\varepsilon_n^2(t)} = 0$$

$$\overset{\dots\dots}{\varepsilon_6^2(t)} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} \right) \doteq 0,034$$

$$\overset{\dots\dots}{\varepsilon_0^2(t)} = 1,$$

$$\overset{\dots\dots}{\varepsilon_{n+1}^2(t)} = \overset{\dots\dots}{\varepsilon_n^2(t)} - \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

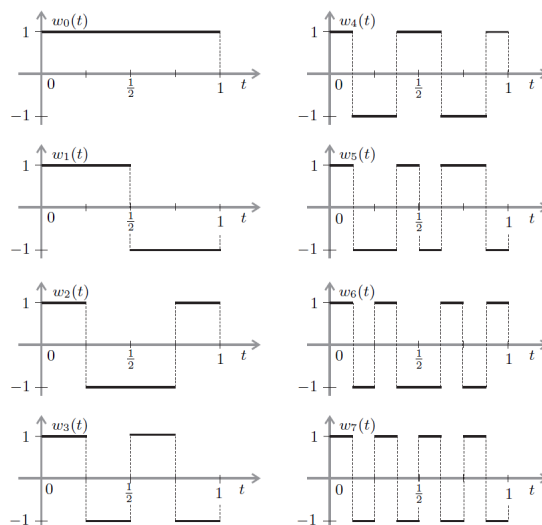
$$n_0 = 2027$$



Walsheve temeljne funkcije

$\{w_i(t)\}$ polno ortonormalno zaporedje temeljnih funkcij na intervalu $(0, 1)$.

$$w_i(t) \in \{-1, +1\}$$



Walsheve temeljne funkcije

Å Zaporedje prvih 2^n Walshevih funkcij lahko pridobimo $2^n \times 2^n$ dimensionalne **Hadamardove matrike** $H(n)$.

Å $H(n)$ ortogonalne matrike z lastnostjo

$$H(n)H(n) = 2^n I$$

$$h_{ij} = \pm 1$$

Å Rekurzivna formula

$$\begin{aligned} H(0) &= (1) , \\ H(n+1) &= \begin{pmatrix} H(n) & H(n) \\ H(n) & -H(n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Walsheve temeljne funkcije

Primer: Hadamardova matrika $H(2)$

$$\begin{aligned} H(0) &= (1) , \\ H(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \\ H(2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Å Hadamardovi matriki lahko iz vsake vrstice (ali stolpca) priredimo prvih 2^n Walshevih funkcij.

Za zgornji primer: 1. vrstica $w_0(t)$, 2. vrstica $w_3(t)$, 3. vrstica $w_1(t)$, 4. vrstica $w_2(t)$.

Drugač en vrstni red.

Indeksiran vrstni red Walshevih funkcij imenujemo sekvenčni vrstni red.

Sekvenca, je številni sprememb predznaka Walsheve funkcije.

Walsheve temeljne funkcije

Å Prednost pri uporabi Walshevih temeljnih funkcij je njihova preprosta izražava, ki omogoča hitro določanje vrednosti koeficientov C_i in amplitud približka $\tilde{x}(t)$.

Å Signal $x(t)$ vzorimo s časovnim razmikom Δt .

$$C_i = \int_0^1 x(t) w_i(t) dt \approx \sum_{k=0}^{M-1} x(k \Delta t) w_i(k \Delta t) \Delta t = \Delta t \sum_{k=0}^{M-1} \pm x(k \Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

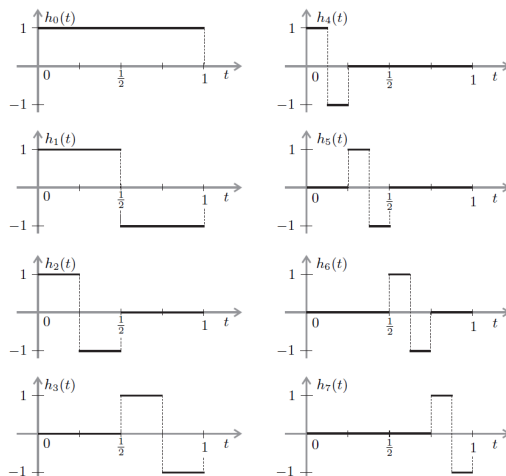
$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^n C_i w_i(t) = \sum_{i=0}^n \pm C_i.$$

Å Postopek je posebej učinkovit pri signalih, ki so podobne oblike kot Walsheve funkcije. Npr. binarne ali sive slike.

Haarove temeljne funkcije

$\{h_i(t)\}$ polno ortogonalno zaporedje temeljnih funkcij na intervalu (0, 1).

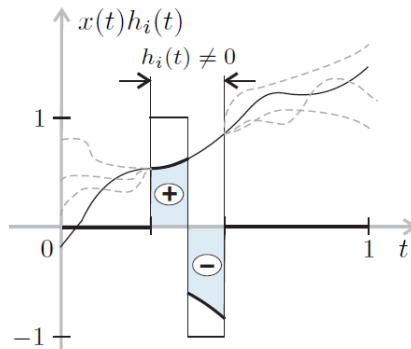
$$h_i(t) \in \{-1, 0, +1\}$$



$$\begin{aligned} K_0 = K_1 &= 1, \\ K_2 = K_3 &= \frac{1}{2}, \\ K_4 = \dots = K_7 &= \frac{1}{4}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Haarove temeljne funkcije

- Å Lokalna obljutljivost in ocena o povprečni spremembi amplitud signala na pripadajočem podintervalu.

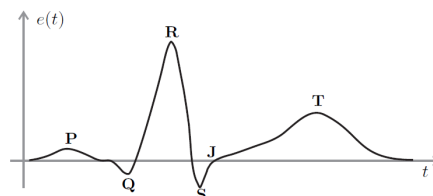


$C_i < 0$: signal na pripadajoč em podintervalu v povprečju narašča,
 $C_i > 0$: signal na pripadajoč em podintervalu v povprečju pada.

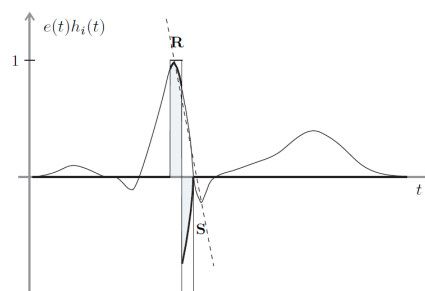
Posplogitev predstavitve Haarovih funkcij nas privede do t.i. valj ne transformacije (ang. Wavelet transform).

Haarove temeljne funkcije

- ## Å Primer: Obdelava EKG signala



Ugotavljanje referenčnega pogoja RS spojnice



Ortogonalni polinomi

$\phi_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ polinom stopnje n .

Zvezne, poljubnokrat odvedljive temeljne funkcije.

Računanje vrednosti potenc: $t^n = t \cdot t^{(n-1)}$

$\{L_n(t)\}$ **Legendrovi polinomi** ortogonalni na intervalu $(-1, +1)$.

$$L_0(t) = 1,$$

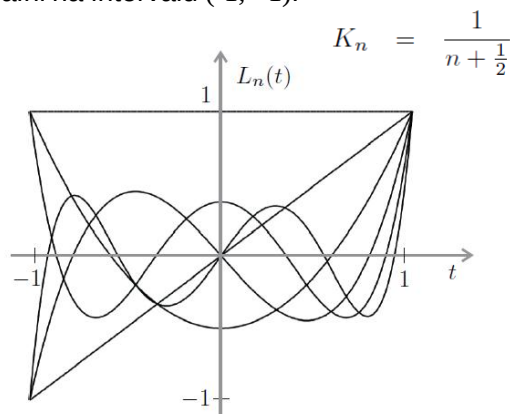
$$L_1(t) = t,$$

$$L_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2},$$

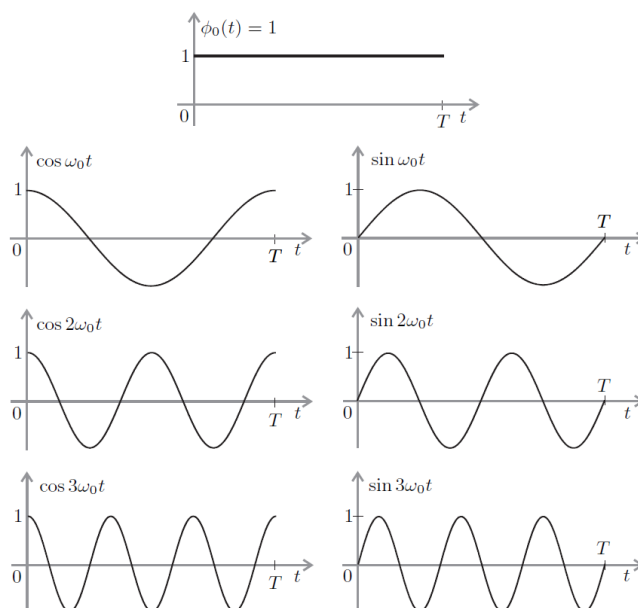
$$L_3(t) = \frac{5t^3 - 3t}{2},$$

$$L_4(t) = \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8},$$

$$L_5(t) = \frac{63t^5 - 70t^3 + 15t}{8}$$



Sinusne temeljne funkcije



Sinusne temeljne funkcije

Zaporedje temeljnih funkcij:

$$1, \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \sin 3\omega_0 t, \dots$$

je ortogonalno polno zaporedje temeljnih funkcij na poljubnem končnem intervalu (t_1, t_2) , pri pogoju, da osnovno krožno frekvenco ω_0 določimo po pravilu

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{in} \quad T = t_2 - t_1.$$

$$K_i = \begin{cases} T, & i = 0 \\ \frac{T}{2}, & i > 0 \end{cases}$$

Ortogonalno zaporedje lahko posplošimo na kompleksne funkcije:

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, \quad -\infty < n < \infty, \quad K_n = T.$$

Sinusne temeljne funkcije

Å Ker je $e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t$,
tudi te funkcije lahko obravnavamo kot sinusne temeljne funkcije.

Å Sinusne trigonometrijske funkcije so zvezne in poljubnokrat zvezno odvedljive funkcije.

Å Približek zapisan v obliki

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-k_s}^{k_z} C_n \phi_n(t) = \sum_{n=-k_s}^{k_z} C_n (\cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t),$$

lahko razumemo, kot da smo približek za signal $x(t)$ predstavili s končno vsoto sinusnih nihanj.

Sprememba območja ortogonalnosti

Zaporedje temeljnih funkcij $\{\phi_i(t)\}$, ki so ortogonalne na končnem časovnem intervalu $t_1 < t < t_2$, lahko z linearno transformacijo neodvisne spremenljivke

$$t' = a(t - b) \quad (2.58)$$

spremenimo v zaporedje temeljnih funkcij

$$\{\phi'_i(t)\} = \{\phi_i(a(t - b))\},$$

ki je ortogonalno na drugem končnem časovnem intervalu

$$t_s < t < t_g.$$

Pri tem je potrebno za vrednosti parametrov a in b izbrati

$$a = \frac{t_2 - t_1}{t_g - t_s}, \quad b = t_s - \frac{t_1}{a}.$$

$$K'_i = \frac{1}{a} K_i$$

Kompleksni spekter periodičnih signalov

Å Koeficiente $F(n)$ imenujemo **kompleksni spekter** periodičnega signala $f(t)$.

- Spekter • odraža frekvenčne lastnosti (n se nanaša na frekvenco $n\omega_0$)
- Kompleksni • vrednosti $F(n)$ so v splošnem kompleksne

Predstavitev z realnimi spektri

Kartezijska $F(n) = C(n) + jD(n)$

$C(n)$ in $D(n)$ sta realni funkciji indeksa n .

$C(n)$ realni spekter

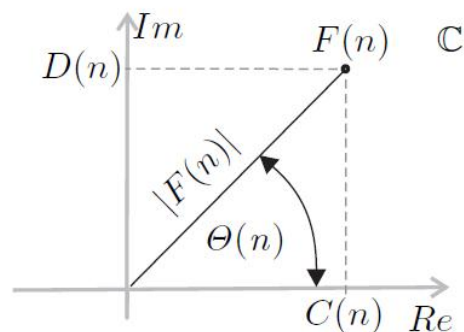
$D(n)$ imaginarni spekter

Polarna $F(n) = |F(n)|e^{j\Theta(n)}$

$|F(n)|$ in $\Theta(n)$ sta realni funkciji indeksa n .

$|F(n)|$ amplitudni spekter

$\Theta(n)$ fazni spekter



Kompleksni spekter periodičnih signalov

$$|F(n)| = \sqrt{C(n)^2 + D(n)^2} = \sqrt{F(n) \cdot \overline{F(n)}} ,$$

$$\Theta(n) = \begin{cases} \arctg \frac{D(n)}{C(n)} , & C(n) > 0 \\ \pm\pi + \arctg \frac{D(n)}{C(n)} , & C(n) < 0 . \end{cases}$$

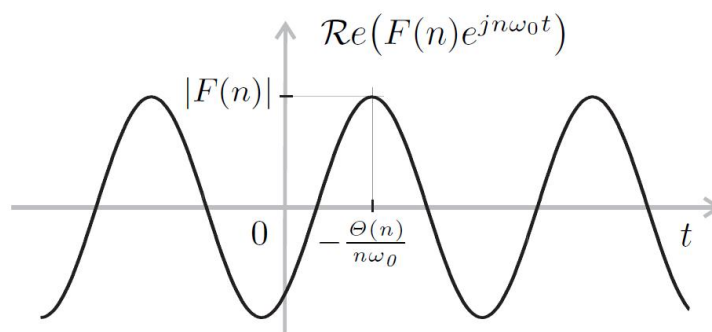
$$C(n) = |F(n)| \cdot \cos \Theta(n) ,$$

$$D(n) = |F(n)| \cdot \sin \Theta(n) .$$

Kompleksni spekter periodičnih signalov

$|F(n)|$ amplituda sinusnega nihanja $e^{jn\omega_0 t}$ pri frekvenci $n\omega_0$, ki je vsebovano v signalu $f(t)$

$\Theta(n)$ določi fazni zamik tega nihanja.



3 Frekvenčna analiza periodičnih signalov

V tem poglavju se ukvarjamo s frekvenčno predstavitvijo periodičnih signalov. Definiramo Dirichletove pogoje in vpeljemo Fourierovo vrsto periodičnih signalov. Seznanimo se s realno in kompleksno Fourierovo vrsto ter vpeljemo kompleksni, realni, imaginarni, amplitudni in fazni spekter signala. Različne vrste spektrov si na koncu poglavja ogledamo še na preprostih primerih signalov.

Poglavje obravnava:

- frekvenčno predstavitev periodičnih signalov,
- Dirichletove pogoje,
- realno in kompleksno Fourierovo vrsto periodičnih signalov, in
- kompleksni spekter periodičnih signalov.

Frekvenčna predstavitev periodičnih signalov

$$f(t) = f(t + T_0)$$

Kako doseči posplošitev izražave signalov s temeljnimi funkcijami iz končnega časovnega na celo časovno os?

Ena izmed možnosti je, da se omejimo pri izbiri signalov in temeljnih funkcij tako, da obravnavamo le periodične signale in periodične temeljne funkcije z enako periodo, kot jo ima sam signal.

Če izrazimo signal s periodičnimi temeljnimi funkcijami na končnem intervalu ene periode, ga zaradi periodičnosti temeljnih funkcij izrazimo povsod!

Primer polnega ortogonalnega zaporedja periodičnih temeljnih funkcij $\{\phi_n(t)\}$ je ravno zaporedje kompleksnih trigonometrijskih funkcij

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Frekvenčna predstavitev periodičnih signalov

Pri predstavitvah periodičnih signalov s kompleksnimi trigonometrijskimi funkcijami običajno splošne oznake za koeficiente C_n nadomestimo z oznako $F(n)$.

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \phi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t}.$$

Zapis

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t}$$

imenujemo kompleksna Fourierova vrsta.

Koeficiente $F(n)$ računamo po splošnem pravilu:

$$C_j = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{\phi_j(t)} dt$$
$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

Zaradi periodičnosti signala in temeljnih funkcij izbira spodnje meje t_1 ni pomembna.

Konvergenca Fourierove vrste

- Zadostni pogoji za konvergenco (*Dirichletovi pogoji*):

1. Signal $f(t)$ mora biti na intervalu ene periode absolutno integrabilen:

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} |f(t)| dt = A < \infty .$$

2. Signal $f(t)$ sme imeti na intervalu ene periode kvečjemu končno število nezveznosti.

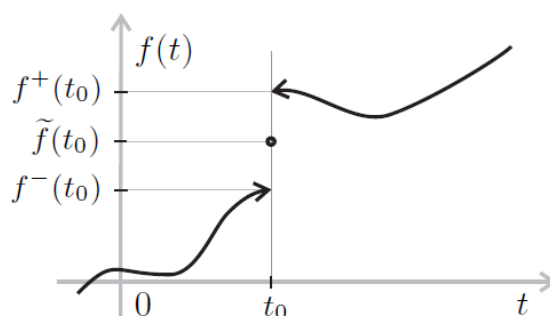
3. Signal $f(t)$ sme imeti na intervalu ene periode kvečjemu končno število lokalnih minimumov in maksimumov.

Za signal $f(t)$, ki izpolnjuje te pogoje velja, da njegova Fourierova vrsta za vsak t , konvergira k povprečni vrednosti zgornje in spodnje limite signala pri tem času.

Konvergenca Fourierove vrste

Za signal $f(t)$, ki izpolnjuje te pogoje velja, da njegova Fourierova vrsta za vsak t , konvergira k povprečni vrednosti zgornje in spodnje limite signala pri tem času.

$$\tilde{f}(t) = \frac{f^+(t) + f^-(t)}{2}$$



Kjer je signal $f(t)$ zvezna funkcija, je $\tilde{f}(t) = \frac{f^+(t) + f^-(t)}{2} = f(t)$.

Fourierova vrsta realnih periodičnih signalov

$$f(t) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\overline{F(n)} &= \overline{\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \overline{e^{-jn\omega_0 t}} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt = F(-n) .\end{aligned}$$

$$F(-n) = \overline{F(n)}$$

Vrednosti koeficientov pri negativnih vrednostih indeksa n lahko izrazimo z vrednostmi koeficientov pri pozitivnih n .

Fourierova vrsta realnih periodičnih signalov

Upoštevajmo $e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t$ in $F(-n) = \overline{F(n)}$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(F(n) \cos n\omega_0 t + j F(n) \sin n\omega_0 t \right) \\ &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(F(n) + \overline{F(n)} \right) \cos n\omega_0 t + j \left(F(n) - \overline{F(n)} \right) \sin n\omega_0 t \right) \\ a_n &= \left(F(n) + \overline{F(n)} \right) \in \mathbb{R} , \quad b_n = j \left(F(n) - \overline{F(n)} \right) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Realna Fourierova vrsta

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

Realna Fourierova vrsta

- Do enakega zapisa bi prišli tudi, če bi realni periodični signal $f(t)$ izrazili direktno z zaporedjem realnih trigonometrijskih funkcij

$$\{1, \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \dots\}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$$

- Enako pa bi iz relane Fourierove vrste lahko prišli tudi nazaj, če bi upoštevali:

$$F(n) = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad \text{in} \quad F(n) = \overline{F(-n)} \quad n < 0.$$

Zapis periodičnih signalov s Fourierovo vrsto

$$f(t) = f(t + T_0)$$

- Kompleksna Fourierova vrsta

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t}$$

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt.$$

$f(t) \longleftrightarrow F(n)$: $f(t)$ in $F(n)$ imenujemo Fourierov par.

Kompleksni spekter periodičnih signalov

- Koeficiente $F(n)$ imenujemo **kompleksni spekter** periodičnega signala $f(t)$.
 - Spekter – odraža frekvenčne lastnosti (n se nanaša na frekvenco $n\omega_0$)
 - Kompleksni – vrednosti $F(n)$ so v splošnem kompleksne

Predstavitev z realnimi spektri

Kartezična $F(n) = C(n) + jD(n)$

$C(n)$ in $D(n)$ sta realni funkciji ineksa n .

$C(n)$ realni spekter

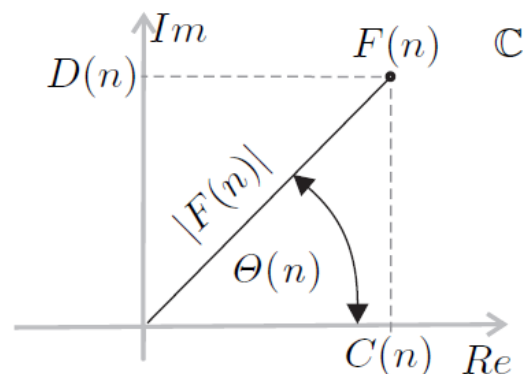
$D(n)$ imaginarni spekter

Polarna $F(n) = |F(n)|e^{j\Theta(n)}$

$|F(n)|$ in $\Theta(n)$ sta realni funkciji ineksa n .

$|F(n)|$ amplitudni spekter

$\Theta(n)$ fazni spekter



Kompleksni spekter periodičnih signalov

$$|F(n)| = +\sqrt{C(n)^2 + D(n)^2} = +\sqrt{F(n) \cdot \overline{F(n)}} ,$$

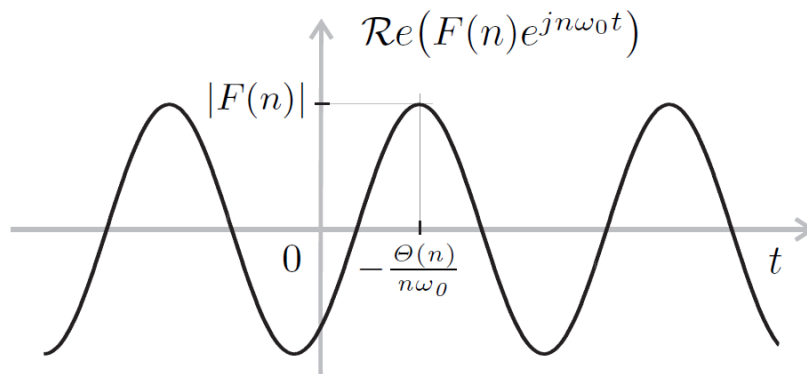
$$\Theta(n) = \begin{cases} \arctg \frac{D(n)}{C(n)} , & C(n) > 0 \\ \pm\pi + \arctg \frac{D(n)}{C(n)} , & C(n) < 0 . \end{cases}$$

$$C(n) = |F(n)| \cdot \cos \Theta(n) ,$$

$$D(n) = |F(n)| \cdot \sin \Theta(n) .$$

Kompleksni spekter periodičnih signalov

$|F(n)|$ amplituda sinusnega nihanja $e^{jn\omega_0 t}$ frekvenci $n\omega_0$, ki je vsebovano v signalu $f(t)$
 $\Theta(n)$ določa fazni zamik tega nihanja.



Spektri realnih periodičnih signalov

$$f(t) \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t \, dt$$

$$|F(n)| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2},$$

$$\Theta(n) = \begin{cases} -\arctg \frac{b_n}{a_n}, & a_n > 0 \\ \pm\pi - \arctg \frac{b_n}{a_n}, & a_n < 0 \end{cases}$$

Spektri realnih periodičnih signalov

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$C(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt ,$$

$$D(n) = -\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$F(-n) = \overline{F(n)}$$

$$C(-n) + jD(-n) = C(n) - jD(n)$$

$$C(n) = C(-n) , \quad |F(n)| = |F(-n)| ,$$

$$D(n) = -D(-n) \quad \Theta(n) = -\Theta(-n) .$$

Spektralna predstavitev realnih periodičnih signalov s svojim potekom za nenegativne frekvence povsem določena.

Spektralna vsebina signala pri negativnih frekvencah je le zrcalna slika dogajanja na pozitivnem delu frekvenčne osi.

Spektri realnih periodičnih signalov

$$f(t) = f(-t)$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

$$F(n) = C(n) \in \mathbb{R} , \quad b_n = 0$$

$$F(n) = F(-n) .$$

$$f(t) = -f(-t)$$

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = 0$$

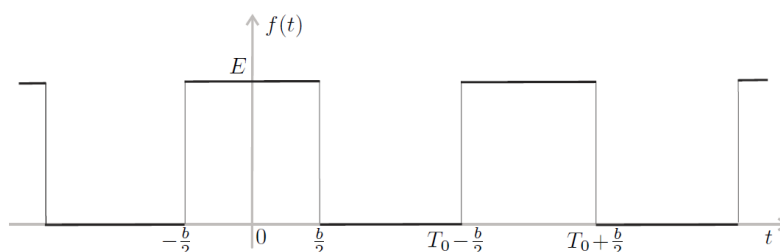
$$F(n) = jD(n) \in \mathbb{I} , \quad a_n = 0$$

$$F(n) = -F(-n) .$$

Primer

- Realni periodični signal $f(t)$ izrazimo z realno Fourierovo vrsto.
- V posebnem primeru, ko je $T_0 = 2b$, določimo tudi vrednost Fourierove vrste pri $t = b/2$, kjer signal $f(t)$ ni zvezna funkcija.

$$f(t) = \begin{cases} E & , \quad -\frac{b}{2} \leq t < +\frac{b}{2} \\ 0 & , \quad +\frac{b}{2} \leq t < T_0 - \frac{b}{2} \\ f(t + nT_0) = f(t) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} \end{cases}$$



Primer

$$f(t) = f(-t)$$

$$b_n = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{T_0 - \frac{b}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} E \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{2E}{T_0} \left. \frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \right|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{4E}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{n\omega_0} \\ &= \frac{2Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} . \end{aligned}$$

$$n = 0 \quad a_0 = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} = \frac{2Eb}{T_0} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} = \frac{2Eb}{T_0}$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t = \frac{Eb}{T_0} + \frac{2Eb}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} \cos n\omega_0 t$$

Primer

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad T_0 = 2b \quad \omega_0 = \frac{\pi}{b}$$

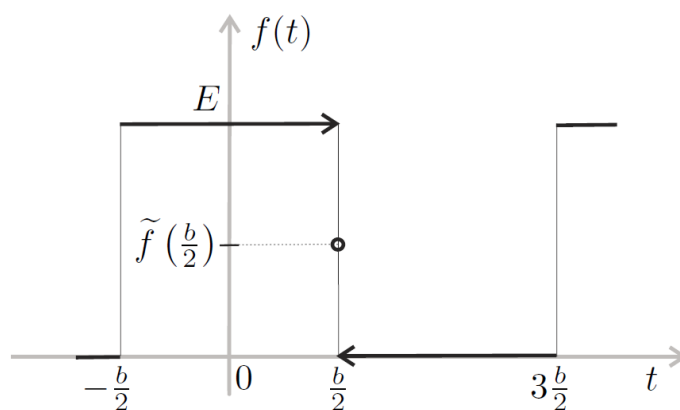
$$a_n = E \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{E}{2} + E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n \frac{\pi}{b} t$$

$$t = \frac{b}{2} \quad \tilde{f}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} = 0 \quad \text{za vsak } n \quad \tilde{f}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{E}{2}$$

Primer



$$f^+\left(\frac{b}{2}\right) = 0,$$

$$f^-\left(\frac{b}{2}\right) = E$$

$$\tilde{f}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{E + 0}{2} = \frac{E}{2}$$

Primer

- Za realni periodični signal $f(t)$, v primeru ko je $T_0 = 2b$, izrazimo še njegov kompleksni, amplitudni in fazni spekter

$$F(n) = \frac{a_n - jb_n}{2} \quad a_n = E \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \quad , \quad b_n = 0 \quad .$$

$$F(n) = C(n) = \frac{a_n}{2} = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \quad C(-n) = C(n)$$

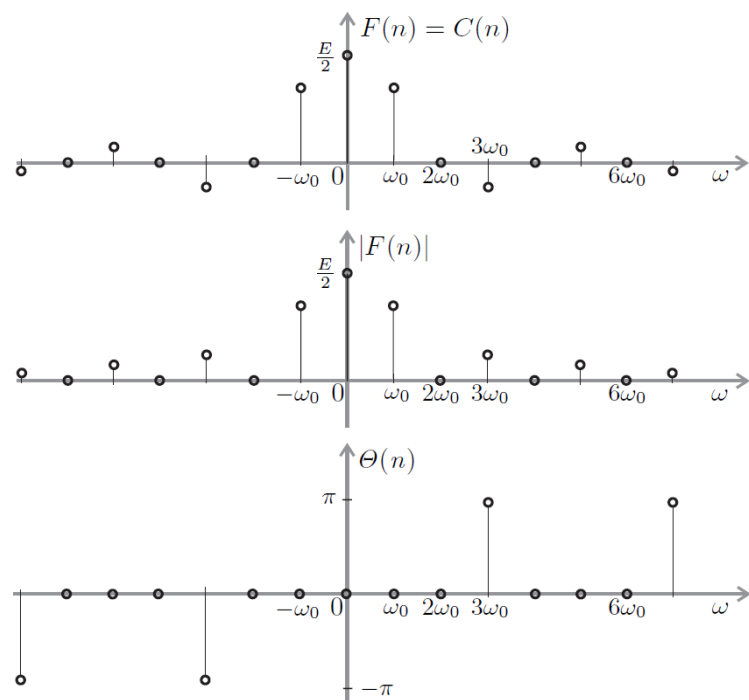
$$F(n) = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \frac{E}{\pi n} , & n = 2k - 1 \\ \frac{E}{2} , & n = 0 \\ 0 , & n = 2k , \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Primer

$$|F(n)| = |C(n)| = \frac{E}{2} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right| = \begin{cases} \frac{E}{\pi |n|} , & n = 2k - 1 \\ \frac{E}{2} , & n = 0 \\ 0 , & n = 2k , \quad k \neq 0 . \end{cases}$$

$$\Theta(n) = \begin{cases} 0 , & n \geq 0 \quad \sin \frac{n\pi}{2} \geq 0 \\ \pi , & \sin \frac{n\pi}{2} < 0 \\ -\pi , & n < 0 \quad \sin \frac{n\pi}{2} > 0 \\ 0 , & \sin \frac{n\pi}{2} \leq 0 \end{cases}$$

Primer



4 Korelacija periodičnih signalov

V poglavju je predstavljena korelacija periodičnih signalov.

Poglavje obravnava:

- definicijo korelacije periodičnih signalov,
- definicijo avtokorelacije in križne korelacije,
- lastnosti korelacije,
- avtokorelacijo periodičnih signalov:
 - neodvisnost od spodnje meje,
 - neodvisnost od spodnje meje,
 - Parsevalovo enačbo,
 - Hermitovo simetrijo,
 - povprečno moč signala,
 - frekvenčno predstavitev avtokorelacije,
 - maksimalnost,
 - zveznost.

Korelacija periodičnih signalov

Korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ periodičnih signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ z enako periodo T_0 je določena z izrazom

$$\varphi_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt. \quad (4.1)$$

Če sta periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ močnostna, $\varphi_{ij}(\tau)$ obstaja za vsak realen časovni zamik τ in jo prav tako lahko opredelimo kot signal.

Izkaže se, da je zaradi posebnih lastnosti, ko je

$$f_i(t) = f_j(t),$$

smiselno ločevati med dvema možnostima:

- če je $f_i(t) \neq f_j(t)$, korelacijo $\varphi_{ij}(\tau)$ imenujemo *križna korelacija*,
- če pa je $f_i(t) = f_j(t)$, korelacijo $\varphi_{ii}(\tau)$ imenujemo *avtokorelacija*.

Lastnosti korelacije

- **Neodvisnost od izbire spodnje meje t_1**

$$\varphi_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt$$

- **Periodičnost**

$$\varphi_{ij}(\tau + T_0) = \varphi_{ij}(\tau)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\tau + T_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau+T_0) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt = \varphi_{ij}(\tau) \end{aligned}$$

Lastnosti korelacije

- Antisimetričnost**

$$\varphi_{ji}(\tau) = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)}$$

$$t' = t + \tau \quad \varphi_{ji}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_j(t)} f_i(t + \tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1+\tau}^{t_1+\tau+T_0} \overline{f_j(t' - \tau)} f_i(t') dt'$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ji}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1+\tau}^{t_1+\tau+T_0} \overline{f_j(t' - \tau)} f_i(t') dt' = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t') f_j(t' - \tau)} dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t') f_j(t' - \tau)} dt' = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)}. \end{aligned}$$

Če sta $f_i(t)$ in $f_j(t)$ realna signala, velja:

$$\varphi_{ji}(\tau) = \varphi_{ij}(-\tau)$$

Lastnosti korelacije

- Frekvenčna predstavitev**

Kompleksni spekter korelacije: $\varphi_{ij}(\tau) \longleftrightarrow \phi_{ij}(n) = \overline{F_i(n)} \cdot F_j(n)$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_j(n) e^{jn\omega_0(t+\tau)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_j(n) e^{jn\omega_0\tau} \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} e^{jn\omega_0 t} dt \\ \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} e^{jn\omega_0 t} dt &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t) e^{-jn\omega_0 t}} dt = \overline{F_i(n)} \end{aligned}$$

$$\varphi_{ij}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{F_i(n)} F_j(n) e^{jn\omega_0\tau}$$

$$\widetilde{\varphi}_{ij}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ij}(n) e^{jn\omega_0\tau} \quad \phi_{ij}(n) = \overline{F_i(n)} \cdot F_j(n) ?$$

Lastnosti korelacije

- **Zveznost**

Korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ je zvezna funkcija, če sta le močnostna periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ omejeni in vsaj odsekoma zvezni funkciji.

Zveznost korelacijske funkcije je pogojena z njeno definicijo kot določenim integralom integranda, ki je omejena in odsekoma zvezna funkcija.

Avtokorelacija periodičnih signalov

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt$$

Lastnosti:

- **Neodvisnost od izbire spodnje meje t ,**

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt$$

- **Periodičnost**

$$\varphi_{ii}(\tau + T_0) = \varphi_{ii}(\tau)$$

- **Hermitova simetrija**

$$\varphi_{ii}(\tau) = \overline{\varphi_{ii}(-\tau)}$$

Če je signal $f_i(t)$ realen: $\varphi_{ii}(-\tau) = \varphi_{ii}(\tau)$ sodost

Ker je avtokorelacija periodičnega signala periodičen signal, je dejansko že povsem določena s svojimi vrednostmi na polovičnem intervalu periode.

$$0 \leq \tau < \frac{T_0}{2}$$

Avtokorelacija periodičnih signalov

- Povprečna moč signala $f_i(t)$

$$\varphi_{ii}(0) = P_{f_i}$$

$$\varphi_{ii}(0) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |f_i(t)|^2 dt = P_{f_i}$$

- Frekvenčna predstavitev $\varphi_{ii}(\tau)$

$$\varphi_{ii}(\tau) \longleftrightarrow \phi_{ii}(n) = |F_i(n)|^2$$

Kompleksni spekter $\phi_{ii}(n)$ realen in nenegativen zato:

$$\begin{aligned} |\phi_{ii}(n)| &= \phi_{ii}(n) , \\ \Theta_{ii}(n) &= 0 . \end{aligned}$$

Avtokorelacija periodičnih signalov

- Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je periodičen signal s faznim spektrom, ki je enak 0.
- Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je določena le z amplitudnim spektrom $|F_i(n)|$ signala $f_i(t)$ in je zato neodvisna od poteka njegovega faznega spektra $\Theta_i(n)$:

$$\widetilde{\varphi_{ii}}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(n) e^{jn\omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_i(n)|^2 e^{jn\omega_0\tau}$$

- To lastnost lahko s pridom uporabimo takrat, ko želimo iz signala $f_i(t)$ izločiti vpliv, ki ga ima na potek signala njegov fazni spekter. Hkrati pa neodvisnost avtokorelacije od faznega spektra izvirnega signala pomeni tudi, da preslikava

$$f_i(t) \rightarrow \varphi_{ii}(\tau)$$

ni povratno-enolična. Oziroma, da vsi periodični signali z enako periodo, ki se ujemajo v amplitudnem spektru, določajo enako avtokorelacijsko funkcijo.

Avtokorelacija periodičnih signalov

$$f_j(t) = f_i(t - t_0)$$

Določimo zvezo med kompleksnima spektroma signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$!

$$t' = t - t_0$$

$$\begin{aligned} F_j(n) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t - t_0) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1-t_0}^{t_1+T_0-t_0} f_i(t') e^{-jn\omega_0(t'+t_0)} dt' \\ &= e^{-jn\omega_0 t_0} \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t') e^{-jn\omega_0 t'} dt' = e^{-jn\omega_0 t_0} F_i(n) . \end{aligned}$$

$$F_j(n) = e^{-jn\omega_0 t_0} F_i(n)$$

$$|F_j(n)| = |e^{-jn\omega_0 t_0} F_i(n)| = |e^{-jn\omega_0 t_0}| \cdot |F_i(n)| = |F_i(n)|$$

$$\varphi_{jj}(\tau) = \varphi_{ii}(\tau)$$

Avtokorelacija periodičnih signalov

- Naj bo periodični signal $f_i(t)$ realen.

$$|F_i(n)| = |F_i(-n)|$$

$$\phi_{ii}(-n) = \phi_{ii}(n)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_{ii}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(n) e^{jn\omega_o \tau} \\ &= \phi_{ii}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left((\phi_{ii}(n) + \phi_{ii}(n)) \cos n\omega_o \tau + j(\phi_{ii}(n) - \phi_{ii}(n)) \sin n\omega_o \tau \right) \\ &= \phi_{ii}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{ii}(n) \cos n\omega_o \tau . \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$|F(n)| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_{ii}(n) = \frac{a_n^2 + b_n^2}{4}$$

$$\widetilde{\varphi}_{ii}(\tau) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos n\omega_o \tau$$

Avtokorelacija periodičnih signalov

- **Parsevalova enačba**
$$\widetilde{\varphi}_{ii}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(n)$$
$$\widetilde{\varphi}_{ii}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(n) e^{jn\omega_o\tau}$$

V izraz za Fourierovo vrsto avtokorelacije postavimo vrednost $\tau = 0$.

$\phi_{ii}(n)$ interpretiramo kot del moči, ki je vsebovan v signalu $f_i(t)$ pri frekvenci $n\omega_o$. Spekter $\phi_{ii}(n)$ nam pove, kako je v signalu $f_i(t)$ porazdeljena moč v odvisnosti od frekvence $n\omega_o$.

Spekter $\phi_{ii}(n)$ zato imenujemo **močnostni spekter** signala $f_i(t)$.

- **Maksimalnost**
$$\varphi_{ii}(0) \geq |\varphi_{ii}(\tau)|$$

Periodični močnostni signali z enako periodo tvorijo vektorski

prostor, v katerem lahko določimo skalarni produkt: $\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$.

Avtokorelacija periodičnih signalov

- V vektorskih prostorih z definiranim skalarnim produktom velja Schwartz-ova nenenačba:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle$$

$$|\langle f_i(t + \tau), f_i(t) \rangle|^2 \leq \langle f_i(t + \tau), f_i(t + \tau) \rangle \cdot \langle f_i(t), f_i(t) \rangle$$

$$|\varphi_{ii}(\tau)|^2 \leq \varphi_{ii}(0) \cdot \varphi_{ii}(0)$$

$$|\varphi_{ii}(\tau)|^2 \leq \varphi_{ii}^2(0),$$

$$|\varphi_{ii}(\tau)| \leq \varphi_{ii}(0).$$

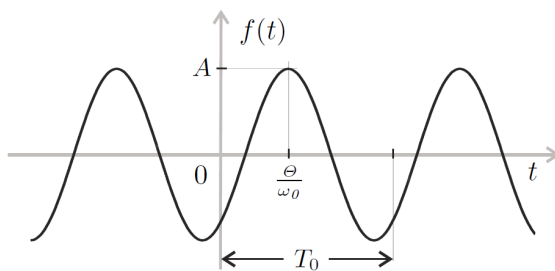
Avtokorelacija periodičnih signalov

- Zveznost**

Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je zvezna funkcija, če je le močnostni periodični signal $f_i(t)$ omejena in vsaj odsekoma zvezna funkcija.

Primer

$$f(t) = A \cos \omega_0 \left(t - \frac{\Theta}{\omega_0} \right) = A \cos(\omega_0 t - \Theta)$$



Določimo avtokorelacijo $\varphi(\tau)$ signala $f(t)$ in podajmo njen potek!

Avtokorelacija periodičnih signalov

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos n\omega_0 \tau$$

$f(t)$ predstavlja sinusno nihanje s frekvenco ω_0 : $f(t) = A \cos(\omega_0 t - \Theta)$.
Ali je njegov zapis že Fourierova vrsta?

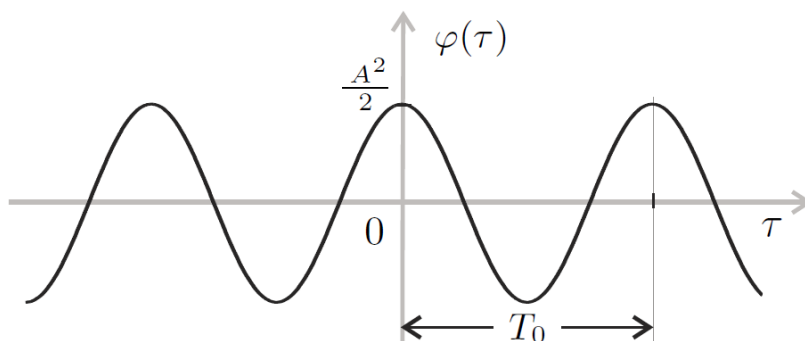
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t - \Theta) = A \cos \Theta \cos \omega_0 t + A \sin \Theta \sin \omega_0 t$$

$$a_1 = A \cos \Theta, \quad b_1 = A \sin \Theta \quad \text{in} \quad a_n = b_n = 0 \quad \text{za} \quad n \neq 1$$

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2) \cos \omega_0 \tau = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau$$

Avtokorelacija periodičnih signalov

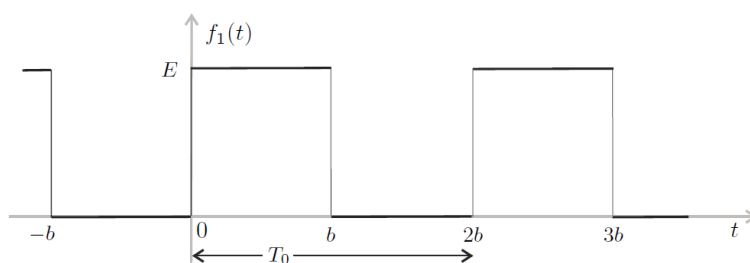


$$\varphi(0) = \frac{A^2}{2}$$

Avtokorelacija periodičnih signalov

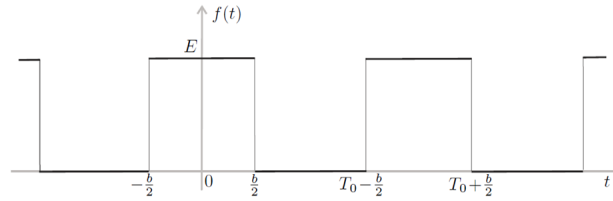
Primer

$$f_1(t) = \begin{cases} E & , \quad 0 \leq t < b \\ 0 & , \quad b \leq t < 2b \\ f(t + n2b) = f(t) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} . \end{cases}$$



Določimo zapis $f_1(t)$ s Fourierovo vrsto in avtokorelacijo $\varphi_{11}(\tau)$ ter narišimo njen potek!

Avtokorelacija periodičnih signalov



$$a_n = E \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}, \quad b_n = 0, \quad F(n) = C(n) = \frac{a_n}{2} = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$$

$$f_1(t) = f\left(t - \frac{b}{2}\right)$$

$$F_1(n) = F(n) e^{-jn\omega_0 \frac{b}{2}} = F(n) e^{-jn\omega_0 \frac{T_0}{4}} = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} e^{-jn\omega_0 \frac{T_0}{4}}$$

$$\tilde{f}_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_1(n) e^{jn\omega_0 t} = \frac{E}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} e^{jn\omega_0 (t - \frac{T_0}{4})}$$

Avtokorelacija periodičnih signalov

$$\tilde{f}_1(t) = \frac{E}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} e^{jn\omega_0 (t - \frac{T_0}{4})}$$

$$\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \quad \text{soda funkcija } n$$

$$e^{jn\omega_0 (t - \frac{T_0}{4})} = \cos n\omega_0 (t - \frac{T_0}{4}) + j \sin n\omega_0 (t - \frac{T_0}{4}) \quad \text{vsota sode in lihe funkcije } n$$

$$\tilde{f}_1(t) = \frac{E}{2} + E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n\omega_0 (t - \frac{T_0}{4})$$

$$\tilde{f}_1(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_0 (t - \frac{T_0}{4}) - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 (t - \frac{T_0}{4}) + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 (t - \frac{T_0}{4}) - \dots \right)$$

Signal $f_1(t)$ smo predstavili kot neskončno vsoto fazno zamaknjenih sinusnih nihanj.

Avtokorelacija periodičnih signalov

- Določanje avtokorelacije

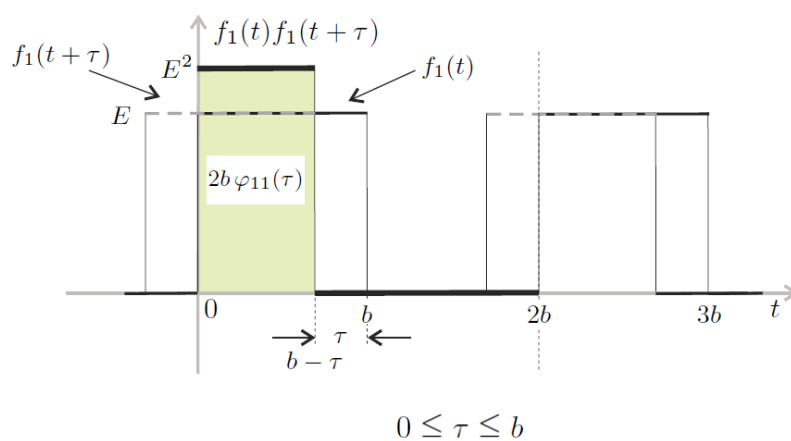
$$\widetilde{\varphi_{11}}(\tau) = \phi_{11}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{11}(n) \cos n\omega_0\tau$$

$$\phi_{11}(n) = |F_1(n)|^2 = |F(n)|^2 = \left(\frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right)^2 = \begin{cases} \frac{E^2}{4} , & n = 0 \\ 0 , & n = 2k \wedge k \neq 0 \\ \frac{E^2}{\pi^2 n^2} , & n = 2k + 1 . \end{cases}$$

$$\varphi_{11}(\tau) = \widetilde{\varphi_{11}}(\tau) = \frac{E^2}{4} + \frac{2E^2}{\pi^2} \left(\cos \omega_0\tau + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0\tau + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0\tau + \dots \right)$$

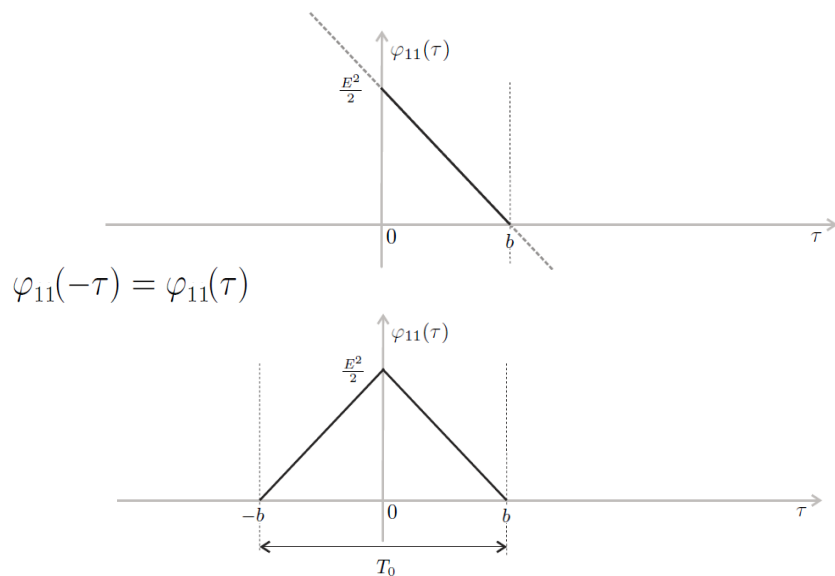
Avtokorelacija periodičnih signalov

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{2b} \int_{t_1}^{t_1+2b} f_1(t) f_1(t+\tau) dt$$



$$f_1(t)f_1(t+\tau) = \begin{cases} E^2 , & 0 < t < b - \tau \\ 0 , & b - \tau < t < 2b . \end{cases} \quad \varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{2b} \int_0^{b-\tau} E^2 dt = \frac{E^2}{2b} (b - \tau)$$

Avtokorelacija periodičnih signalov

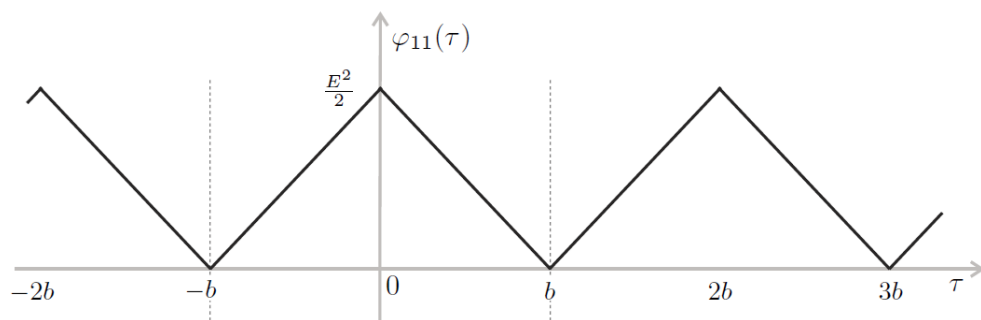


$$\varphi_{11}(-\tau) = \varphi_{11}(\tau)$$

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{E^2}{2b}(b + \tau) \quad -b \leq \tau \leq 0$$

Avtokorelacija $\varphi_{11}(\tau)$ je periodična s periodo $T_0 = 2b$.

Avtokorelacija periodičnih signalov



$$\varphi_{11}(\tau) = \begin{cases} \frac{E^2}{2b}(b - |\tau|) & , \quad -b < \tau < b \\ \varphi_{11}(\tau + k2b) = \varphi_{11}(\tau) , \quad k \in \mathbb{Z} , & \text{drugod .} \end{cases}$$

5 Frekvenčna analiza neperiodičnih signalov

V tem poglavju se ukvarjamo s frekvenčno analizo neperiodičnih signalov.

Poglavje obravnava:

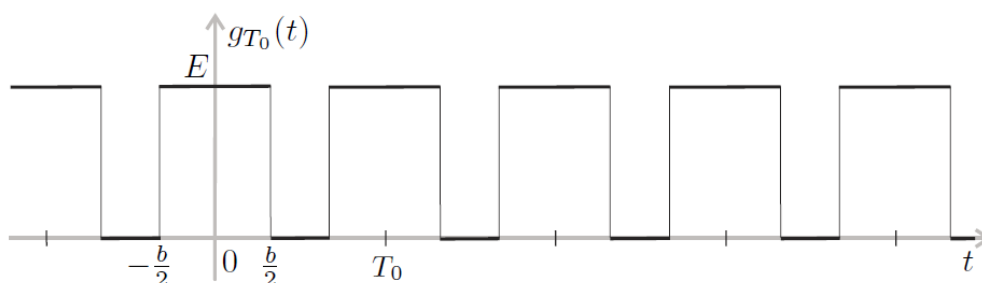
- vpliv postopka daljšanja periode na spekter periodičnega signala,
- Fourierov integral,
- Fourierovo transformacijo in inverzno Fourierovo transformacijo,
- kompleksni spekter neperiodičnih signalov,
- lastnosti Fourierove transformacije, in
- lastnosti spektrov realnih neperiodičnih signalov.

Vpliv postopka daljšanja periode na spekter periodičnega signala

- Opazujemo družino sodih periodičnih pravokotnih impulzov $\{g_T(t)\}$, ki jim spreminjamo periodo T :

$$g_T(t) = \begin{cases} E & , \quad -\frac{b}{2} \leq t < +\frac{b}{2} \\ 0 & , \quad +\frac{b}{2} \leq t < T - \frac{b}{2} \\ g_T(t + nT) = g_T(t) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} \end{cases} .$$

- Naj bo $T = T_0$

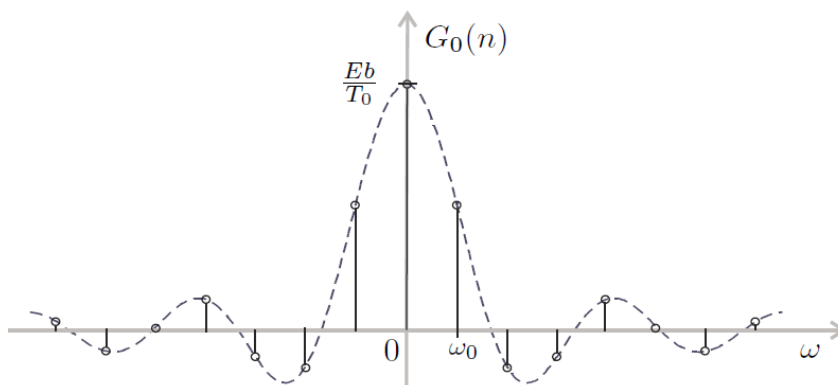


Vpliv postopka daljšanja periode na spekter periodičnega signala

$$G_0(n) = \frac{Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} .$$

- Vrednosti spektra $G_0(n)$ ležijo na krivulji $\frac{Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}}$ pri $\omega = n\omega_0$.

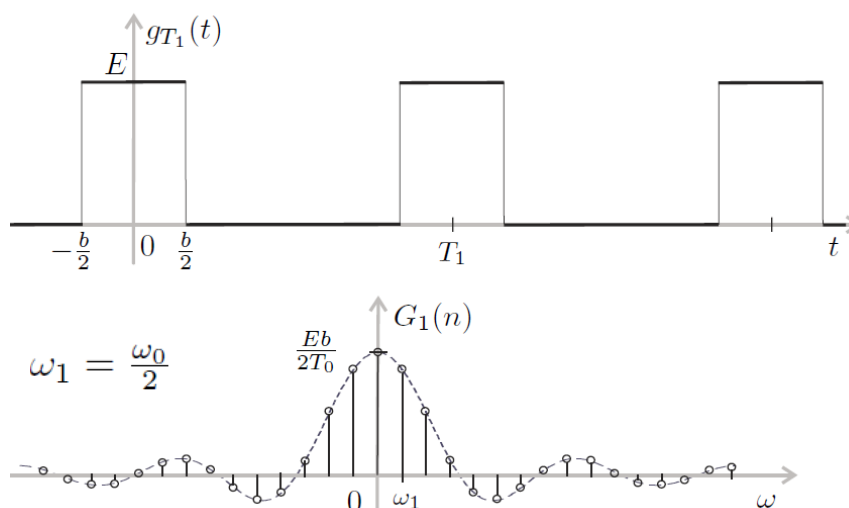
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



Vpliv postopka daljšanja periode na spekter periodičnega signala

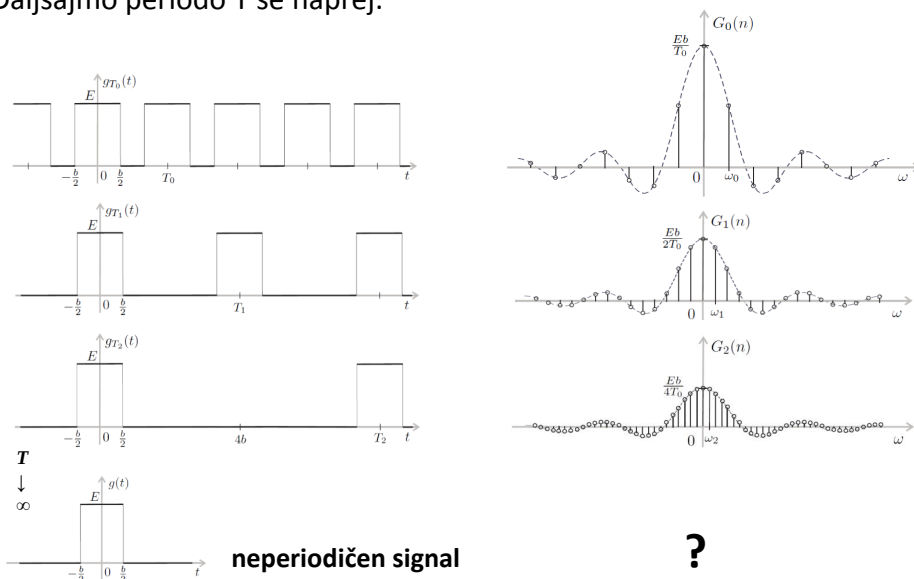
- Povečajmo periodo $T_1 = 2T_0$:

$$G_1(n) = \frac{Eb}{T_1} \frac{\sin \frac{n\omega_1 b}{2}}{\frac{n\omega_1 b}{2}}.$$



Vpliv postopka daljšanja periode na spekter periodičnega signala

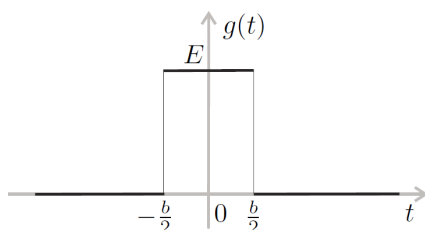
- Spektralne črte postanejo enkrat bolj goste $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{2T_0} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\omega_0}{2}$.
- Amplitude spektra $G_1(n)$ pa se, zaradi $\frac{Eb}{T_1} = \frac{1}{2} \frac{Eb}{T_0}$, za polovico zmanjšajo.
- Daljšajmo periodo T še naprej:



Vpliv postopka daljšanja periode na spekter periodičnega signala

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g_T(t) = g(t)$$

- $g(t)$ je neperiodičen signal.



- Spektralne črte se bodo vse bolj zgostile in v limiti prekrile vso frekvenčno os. Spekter bo postal zvezen.
- Hkrati pa se bodo velikosti spektra $G(n)$ manjšale in v limiti postale infinitezimalno majhne.

Fourierov integral

- Naj bo $f_p(t)$ poljuben periodični signal s periodo T_0 , ki ga lahko izrazimo s Fourierovo vrsto:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t}$$
$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f_p(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau$$

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f_p(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right\} e^{jn\omega_0 t}$$

Fourierov integral

- Izvedimo postopek daljšanja periode signala $f_p(t)$

$$\begin{aligned} \lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_p(t) &= f(t) && f(t) \text{ je neperiodičen signal} \\ \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \omega_0 &= d\omega && \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi} \\ \lim_{T_0 \rightarrow \infty} n\omega_0 &= \omega \end{aligned}$$

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f_p(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \right\} e^{jn\omega_0 t}$$

S postopkom limitiranja $T_0 \rightarrow \infty$ vrsta preide v integral:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega$$

Fourierov integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega$$

- Enačbo po analogiji s Fourierovo vrsto imenujemo **Fourierov integral**.

Zapis neperiodičnega signala $f(t)$ z integralom kompleksnih sinusnih nihanj $e^{j\omega t}$.

Fourierov integral je določen z integralom preko cele frekvenčne osi. Zaradi tega so v neperiodičnih signalih lahko zastopana sinusna nihanja $e^{j\omega t}$ s poljubno realno frekvenco ω .

- Spekter neperiodičnih signalov je zvezen.

Vsako izmed sinusnih nihanj $e^{j\omega t}$ v izrazu za Fourierov integral nastopa pomnoženo z $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} d\omega$, kar je zaradi diferenciala $d\omega$ infinitezimalno majhna količina.

- Sinusna nihanja $e^{j\omega t}$ so v neperiodičnih signalih zastopana z infinitezimalno amplitudo. Končna ostaja le vrednost integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$, ki jo lahko opredelimo kot amplitudno gostoto.

Fourierova transformacija in inverzna Fourierova transformacija

Označimo: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$.

Fourierov integral krajše zapišemo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Enačbo, ki določa $F(\omega)$ menujemo Fourierova transformacija signala $f(t)$.
Simbolično to označimo kot:

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))$$

Fourierov integral v zgornji obliki pa inverzna Fourierova transformacija $F(\omega)$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega))$$

Fourierova transformacija in inverzna Fourierova transformacija

- Fourierova in inverzna Fourierova transformacija definirata preslikavi med časovno in frekvenčno predstavitev signala.
Ker gre za dve med seboj inverzni preslikavi, to pomeni, da za signale, za katere transformaciji obstajata, pridobimo dve med seboj ekvivalentni predstavitvi, ki jih pri obdelavi in analizi signalov lahko enakovredno uporabljamo.
- $f(t)$ in $F(\omega)$ imenujemo Fourierjev par:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

Dirichletovi pogoji

Zadostni pogoji, ki jih mora izpolnjevati signal $f(t)$, da ga lahko izrazimo s Fourierovim integralom:

- Signal $f(t)$ je absolutno integrabilen preko cele časovne osi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty .$$

- Signal $f(t)$ ima v vsakem končnem intervalu le končno število nezveznosti.
- Signal $f(t)$ ima v vsakem končnem intervalu le končno število maksimumov in minimumov.

Če signal $f(t)$ izpolnjuje pogoje za Fourierov integral velja:

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{f^+(t) + f^-(t)}{2} .$$

Kompleksni spekter neperiodičnih signalov

- Fourierjevo transformacijo $F(\omega)$ imenujemo tudi **kompleksni spekter** signala $f(t)$.

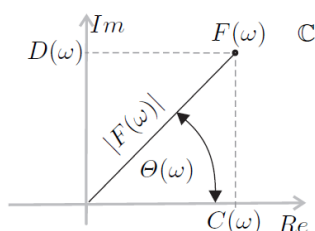
- Kartezični zapis $F(\omega) = C(\omega) + jD(\omega)$

$C(\omega)$ realni spekter ,

$D(\omega)$ imaginarni spekter signala $f(t)$.

- Polarni zapis $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}$

$|F(\omega)|$ spekter amplitudne gostote, $|F(\omega)| = +\sqrt{C(\omega)^2 + D(\omega)^2} = +\sqrt{F(\omega) \cdot \overline{F(\omega)}} ,$
 $\Theta(\omega)$ fazni spekter signala $f(t)$.



$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{D(\omega)}{C(\omega)} , & C(\omega) > 0 \\ \pm\pi + \arctg \frac{D(\omega)}{C(\omega)} , & C(\omega) < 0 , \end{cases}$$

$$C(\omega) = |F(\omega)| \cdot \cos \Theta(\omega) ,$$

$$D(\omega) = |F(\omega)| \cdot \sin \Theta(\omega) .$$

Kompleksni spekter neperiodičnih signalov

S stališča fizikalne interpretacije frekvenčne (spektralne) vsebine signala je pomembnejši polarni zapis kompleksnega spektra $F(\omega)$.

- Spekter amplitudne gostote $|F(\omega)|$ podaja amplitudno gostoto sinusnega nihanja $e^{j\omega t}$ pri frekvenci ω , ki je vsebovano v signalu $f(t)$,
- fazni spekter $\Theta(\omega)$ pa njegov fazni zamik.

Lastnosti Fourierove transformacije

- **Lastnosti spektrov realnih neperiodičnih signalov**
 $f(t)$ realen signal

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt ,$$

$$D(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt .$$

Spekter realnih signalov je popolnoma določen že s svojim potekom za pozitivne frekvence ω .

Potek spektra za negativne frekvence je le sodo ali liho prezrcaljen potek spektra s pozitivne frekvenčne osi.

Izpeljava enaka kot za kompleksni spekter periodičnih signalov

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)} ,$$

$$C(-\omega) = C(\omega) ,$$

$$D(-\omega) = -D(\omega)$$

$$|F(-\omega)| = |F(\omega)| ,$$

$$\Theta(-\omega) = -\Theta(\omega) .$$

Lastnosti spektrov realnih neperiodičnih signalov

- realni signal $f(t)$ soda funkcija: $f(t) = f(-t)$
 $f(t) \cdot \sin \omega t$ je liha funkcija, zato $D(\omega) = 0$.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= C(\omega) \in \mathbb{R} \\ F(\omega) &= F(-\omega) . \end{aligned}$$

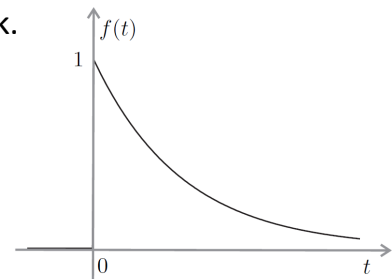
- realni signal $f(t)$ liha funkcija: $f(t) = -f(-t)$
 $f(t) \cdot \cos \omega t$ je liha funkcija, zato $C(\omega) = 0$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= j D(\omega) \in \mathbb{I} \\ F(\omega) &= -F(-\omega) . \end{aligned}$$

Primer 1

- Za signal $f(t)$ določimo njegov kompleksni spekter $F(\omega)$ in realne spektre $C(\omega)$, $D(\omega)$, $|F(\omega)|$, $\Theta(\omega)$ ter narišimo njihov potek.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0, \quad a > 0 \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}$$



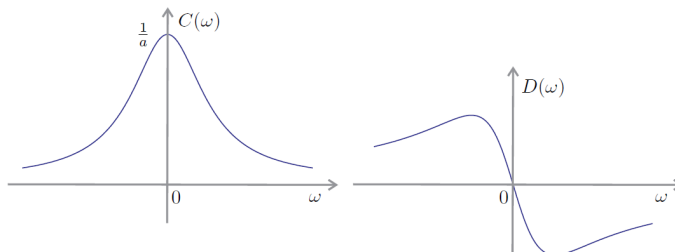
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} . \end{aligned}$$

$$C(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}, \quad D(\omega) = -\frac{\omega}{a^2 + \omega^2} .$$

Primer 1

$$C(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2},$$

$$D(\omega) = -\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

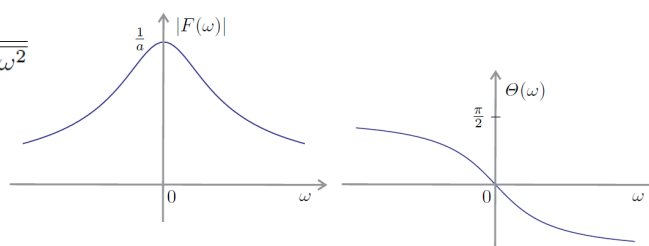


$$|F(\omega)| = +\sqrt{C(\omega)^2 + D(\omega)^2}$$

$$= +\sqrt{\frac{a^2 + \omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2}} = \frac{1}{+\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

$$\Theta(\omega) = \arctan \frac{D(\omega)}{C(\omega)}$$

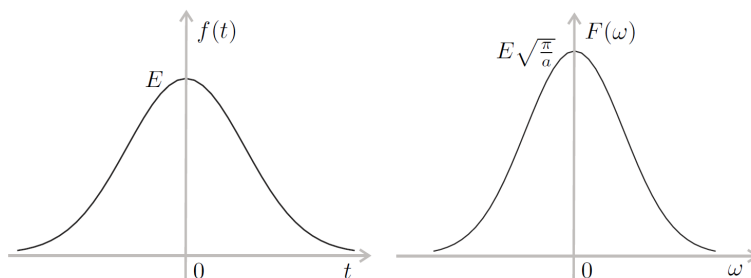
$$= \arctan\left(-\frac{\omega}{a}\right) = -\arctan \frac{\omega}{a}$$



Primer 2

- Fourierova transformacija signala $f(t) = Ee^{-at^2}$, $E, a > 0$
(Za izpeljavo glej učbenik Signali str. 101 – 1)

$$F(\omega) = E\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$$



Signal $f(t)$ in njegov spekter $F()$ imata enako funkcijsko obliko.

- Signal $f(t)$ je in varianten na Fourierovo transformacijo!

6 Nekatere lastnosti Fourierjeve in Inverzne Fourierjeve transformacije

V tem poglavju se seznanimo z izbranimi lastnostmi Fourierove in inverzne Fourierove transformacije.

Poglavje obravnava:

- linearnost Fourierove in inverzne Fourierove transformacije,
- kompleksni spekter pri
 - premiku signala po časovni osi,
 - premiku signala po frekvenčni osi,
 - amplitudni modulaciji signala,
 - odvodu signala, in
 - integralu signala.

Linearnost

- Fourierova in inverzna Fourierova transformacija sta linearni transformaciji:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) &= \alpha \mathcal{F}(f_1(t)) + \beta \mathcal{F}(f_2(t)) , \\ \mathcal{F}^{-1}(\alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)) &= \alpha \mathcal{F}^{-1}(F_1(\omega)) + \beta \mathcal{F}^{-1}(F_2(\omega)) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega) = \alpha \mathcal{F}(f_1(t)) + \beta \mathcal{F}(f_2(t))\end{aligned}$$

Podobnost

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \qquad \mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$g(t) = f(at) \quad t' = at \quad a > 0$$

$$\begin{aligned}G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega \frac{t'}{a}} dt' \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} dt' = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

$$a < 0$$

$$\begin{aligned}G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} dt' \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} dt' = \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}$$

Podobnost

Preslikava

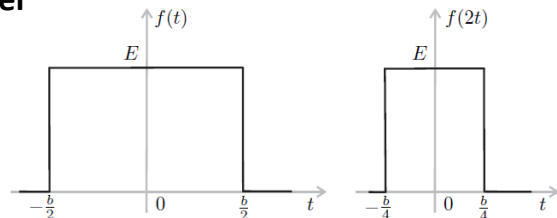
$$f(t) \rightarrow f(at)$$

pomeni krčenje ali razteg poteka signala $f(t)$ po časovni osi. Če je $|a| > 1$, je potek signala $f(at)$ skrčen glede na $f(t)$, sicer pa raztegnjen.

- Lastnost podobnosti pravi, da se v primeru, ko se potek signala skrči po časovni osi, njegov spekter po frekvenčni osi raztegne in obratno.

Primer

$$f(t) = \begin{cases} E, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}.$$

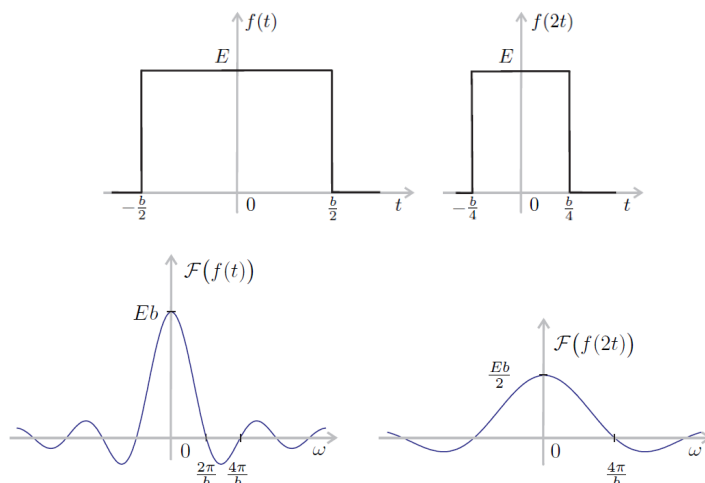


Določimo kompleksna spektra signalov $f(t)$ in $f(2t)$ ter skicirajmo njun potek.

Primer

$$\begin{aligned} F(\omega) &= C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E \cos \omega t dt = 2E \int_0^{\frac{b}{2}} \cos \omega t dt \\ &= \frac{2E}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{\frac{b}{2}} = 2E \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\omega} = Eb \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(f(2t)) = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{Eb}{2} \frac{\sin \frac{\omega b}{4}}{\frac{\omega b}{4}}$$



Premik po časovni osi

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad \mathcal{F}(f(t - t_0)) = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

$$g(t) = f(t - t_0) \quad t' = t - t_0$$

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega(t'+t_0)} dt' \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' = e^{-j\omega t_0} F(\omega) . \end{aligned}$$

$$|G(\omega)| = |e^{-j\omega t_0}| |F(\omega)| = |F(\omega)|$$

$$G(\omega) = |G(\omega)| e^{j\Theta_g(\omega)} = |F(\omega)| e^{j\Theta_f(\omega)} e^{-j\omega t_0} = |G(\omega)| e^{j(\Theta_f(\omega) - \omega t_0)}$$

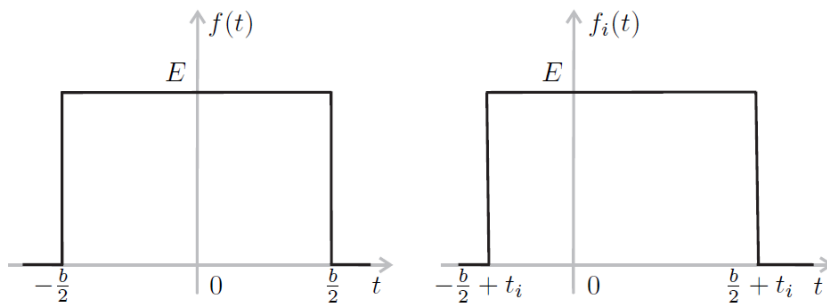
$$\Theta_g(\omega) = \Theta_f(\omega) - \omega t_0$$

- Spekter amplitudne gostote se zaradi premika signala po časovni osi ne spremeni.
- Časovni zamik povzroči linearno spremembo faznega spektra. Velja tudi obratno.

Primer

$$f(t) = \begin{cases} E, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod} \end{cases},$$

$$f_i(t) = f(t - t_i) .$$



Določimo spekter amplitudne gostote in fazni spekter signalov $f(t)$ in $f_i(t)$ ter skicirajmo njihove poteke.

Primer

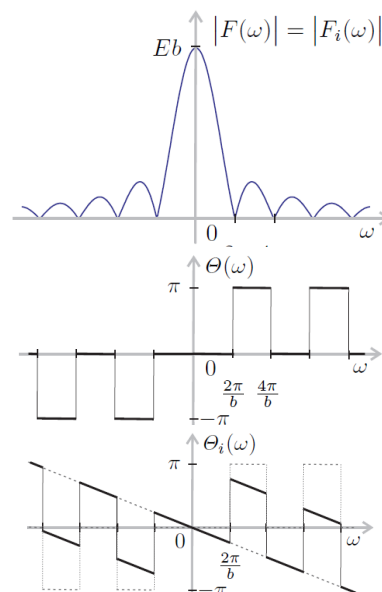
$$F(\omega) = C(\omega) = Eb \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}},$$

$$|F(\omega)| = Eb \left| \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} \right|.$$

$$|F_i(\omega)| = |F(\omega)| = Eb \left| \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} \right|$$

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} 0, & C(\omega) > 0 \\ \pm\pi, & C(\omega) < 0. \end{cases}$$

$$\Theta_i(\omega) = \Theta(\omega) - t_i \omega.$$



Premik po frekvenčni osi

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad \mathcal{F}^{-1}(F(\omega - \omega_0)) = e^{j\omega_0 t} f(t)$$

$$G(\omega) = F(\omega - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} F(\omega - \omega_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) e^{j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

$$g(t) = f(t) e^{j\omega_0 t}$$

Amplitudna modulacija

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad f(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0))$$

$g(t) = f(t) \cos \omega_0 t$ $g(t)$ imenujemo amplitudno moduliran signal $f(t)$, kjer je ω_0 poljubna realna frekvenca.

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

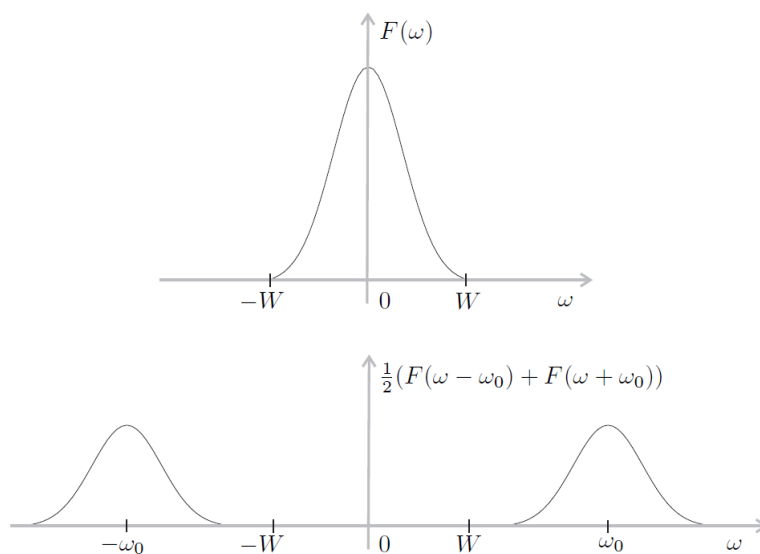
$$g(t) = \frac{1}{2} f(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t) e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0))$$

$$F(\omega) = 0 \iff |\omega| > W \quad W \text{ frekvenčna širina signala}$$

$$\omega_0 \gg W$$

Amplitudna modulacija

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad f(t) \cos \omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0))$$



Spekter odvoda signala

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad \mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = j\omega F(\omega)$$

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+\Delta t)}{\Delta t} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\Delta t} e^{-j\omega t} dt \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (I_1 - I_2) \end{aligned}$$

Spekter odvoda signala

$$t' = t + \Delta t$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t')}{\Delta t} e^{-j\omega(t'-\Delta t)} dt' = \frac{e^{j\omega\Delta t}}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' = \frac{e^{j\omega\Delta t} F(\omega)}{\Delta t},$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\Delta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{F(\omega)}{\Delta t},$$

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (I_1 - I_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(\omega) \frac{e^{j\omega\Delta t} - 1}{\Delta t} = F(\omega) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{j\omega(0+\Delta t)} - e^{j\omega 0}}{\Delta t} \\ &= F(\omega) \frac{de^{j\omega t}}{dt} \Big|_{t=0} = j\omega F(\omega). \end{aligned}$$

Če je $f(t)$ n krat odvedljiv,

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (j\omega)^n F(\omega)$$

Spekter odvoda signala

Komentar

Pogosto je koristen del zastopan v nižjem delu spektra signala, šum pa je visokofrekvenčne narave. V takem primeru se razmerje signal/šum poslabša, če namesto originalnega signala $f(t)$ obravnavamo njegov odvod $g(t)$, saj zaradi zveze

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = G(\omega) = j\omega F(\omega)$$

$$\begin{aligned} |G(\omega)| &> |F(\omega)|, & \omega > 1, \\ |G(\omega)| &< |F(\omega)|, & \omega < 1. \end{aligned}$$

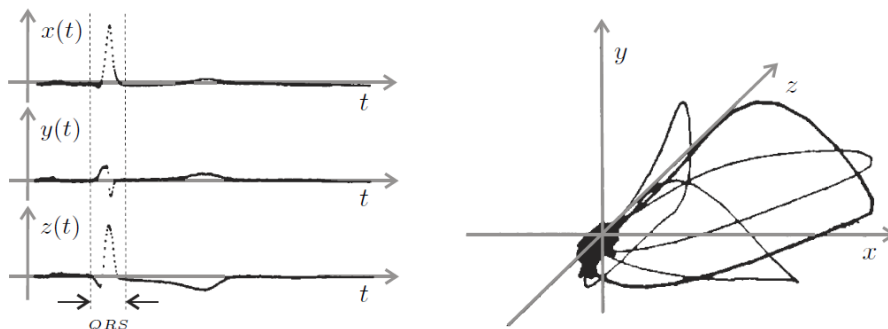
Negativni učinek se še poveča, če namesto prvega odvoda obravnavamo višji odvod signala $f(t)$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (j\omega)^n F(\omega)$$

Primer

Elektrokardiografske signale lahko z ustrezno porazdelitvijo elektrod po telesu izmerimo v različnih smereh. S posebno razdelitvijo elektrod lahko pridobimo tudi elektrokardiografske signale v treh ortogonalnih smereh $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{z}$ glede na normalno lego človeškega telesa. Tako pridobljeno trojko signalov $(x(t), y(t), z(t))$ imenujemo vektorkardiogram (VCG).

Potek VCG-ja lahko predstavimo kot sočasno predstavitev vseh treh kanalov ali tudi kot krivuljo v tridimenzionalnem prostoru. Posamezni značilni deli EKG signalov se prikažejo kot zanke v prostoru. Najizrazitejša je zanka, ki ustreza največjim amplitudnim spremembam v EKG-ju, to je predelu QRS.



Primer

Pri kliničnem raziskovanju potekov QRS zank se je izkazalo, da so te prostorske krivulje večinoma ravninske in da odstopanja od takega poteka kažejo na določeno bolezensko stanje.

Potek prostorske krivulje, ki je vsaj trikrat zvezno odvedljiva, povsem določimo s fleksijsko ukrivljenostjo $\zeta(s)$ in torzijsko ukrivljenostjo $\tau(s)$

$$\begin{aligned}\zeta^2(s) &= \langle \vec{v}''(s), \vec{v}''(s) \rangle, \\ \tau(s) &= \frac{[\vec{v}'(s), \vec{v}''(s), \vec{v}'''(s)]}{\zeta(s)}\end{aligned}$$

$$\vec{v}(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Primer

Če velja, da je $\tau(s) = 0$, je krivulja $\vec{v}(s)$ ravninska.

Povprečna absolutna torzijska ukrivljenost

$$\frac{1}{L} \int_0^L |\tau(s)| ds, \quad L \text{ dolžina zanke}$$

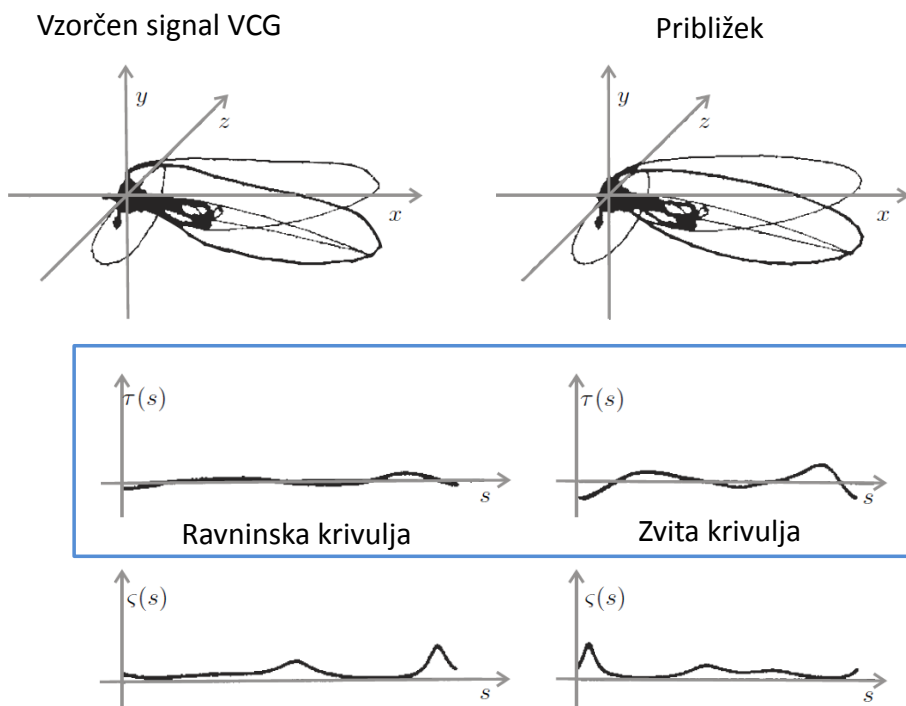
mera za „ravninskost“ zanke.

Pri določanju ocen za torzijsko ukrivljenost težave.

- Potrebno oceniti vrednosti prvega, drugega in tretjega odvoda. Že samo zaradi napak, ki se jim ne moremo izogniti zaradi kvantizacijskega šuma, je bil efekt poslabšanja razmerja signal/šum pri večkratnem odvajanju signalov tak, da so bili rezultati ocene torzijske ukrivljenosti povsem neuporabni.
- Uporabili približek s trigonometrijskimi funkcijami in odvajanje izvedli analitično

$$\vec{v}(s) \approx \vec{v}^*(s) = \sum_{n=-k}^k \vec{V}(n) e^{jn\omega_0 s}$$

Primer



Spekter integrala signala

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \quad \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right) = -\frac{j}{\omega} F(\omega)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^t \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau = f(t) \longleftrightarrow \frac{(j\omega F(\omega))}{j\omega} = F(\omega) ,$$

$$g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) = -\frac{j}{\omega} F(\omega) .$$

Nasprotno kot v prej, se situacija, ko visokofrekvenčni del v signalu predstavlja nekoristni signal – "šum", po integriranju signala izboljša. Zato je integriranje v postopkih obdelave signalov ponavadi stabilen proces, ki razmerje signal/šum izboljša.

7 Korelacija in kovolucija neperiodičnih signalov

V tem poglavju so predstavljeni delta funkcija, korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov.

Poglavje obravnava:

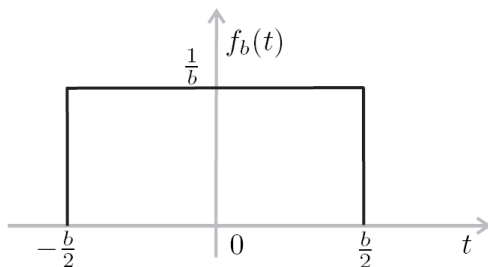
- Fourierovo transformacijo delta funkcije in konstante,
- tipalno lastnost delta funkcije,
- avtokorelacijo neperiodičnih signalov,
- lastnosti avtokorelacije neperiodičnih signalov,
- križno korelacijo neperiodičnih signalov,
- lastnosti križne korelacije neperiodičnih signalov,
- konvolucijo neperiodičnih signalov,
- lastnosti konvolucije neperiodičnih signalov, in
- linearne stacionarne sisteme.

Fourierjeva transformacija funkcije $\delta(t)$ in konstante

$$f_b(t) = \begin{cases} E, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2}, \quad E \cdot b = 1 \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$

$$F_b(\omega) = Eb \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}}$$

$$\lim_{b \rightarrow 0} F_b(\omega) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} = \Delta(\omega) = 1$$

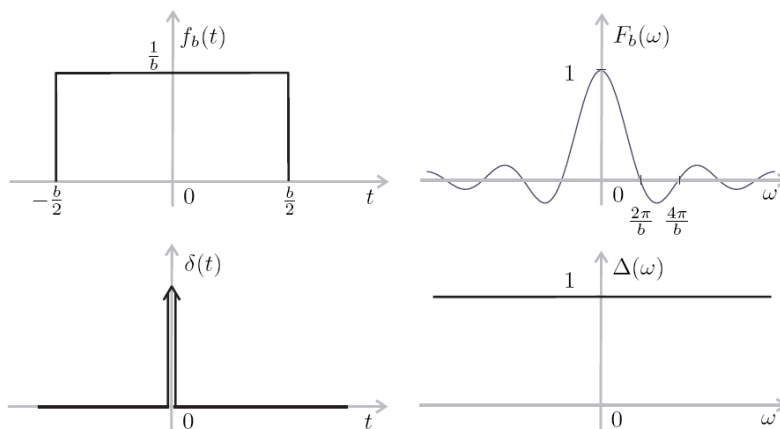


Fourierjeva transformacija funkcije $\delta(t)$ in konstante

Signal z $\delta(t)$ lastnostjo, da je njegov kompleksni spekter $\Delta(\omega)$ enak konstanti 1, imenujemo *funkcija delta*. Funkcijo $\delta(t)$ torej implicitno definiramo s spektralno lastnostjo:

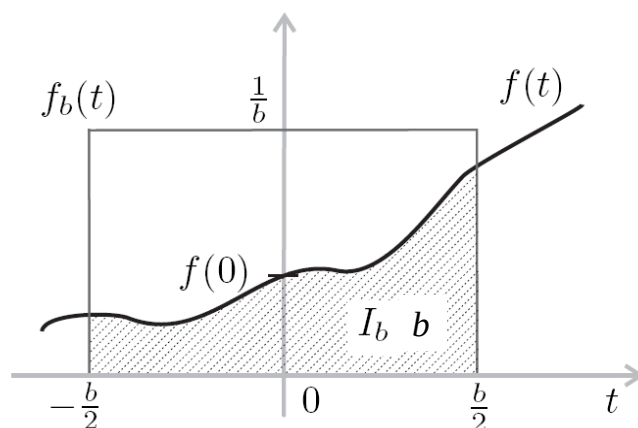
$$\delta(t) \longleftrightarrow \Delta(\omega) = 1.$$

Včasih funkciji $\delta(t)$ pravimo tudi *Diracov impulz* ali *enotin impulz*.



Tipalna lastnost funkcije $\delta(t)$

$$I_b = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f_b(t) dt = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} f(t) dt$$



I_b : Povprečna vrednost $f(t)$ na intervalu $-b/2 < t < +b/2$

Tipalna lastnost funkcije $\delta(t)$

$$\lim_{b \rightarrow 0} I_b = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Druga implicitna definicija.

Obe definiciji sta med sabo ekvivalentni

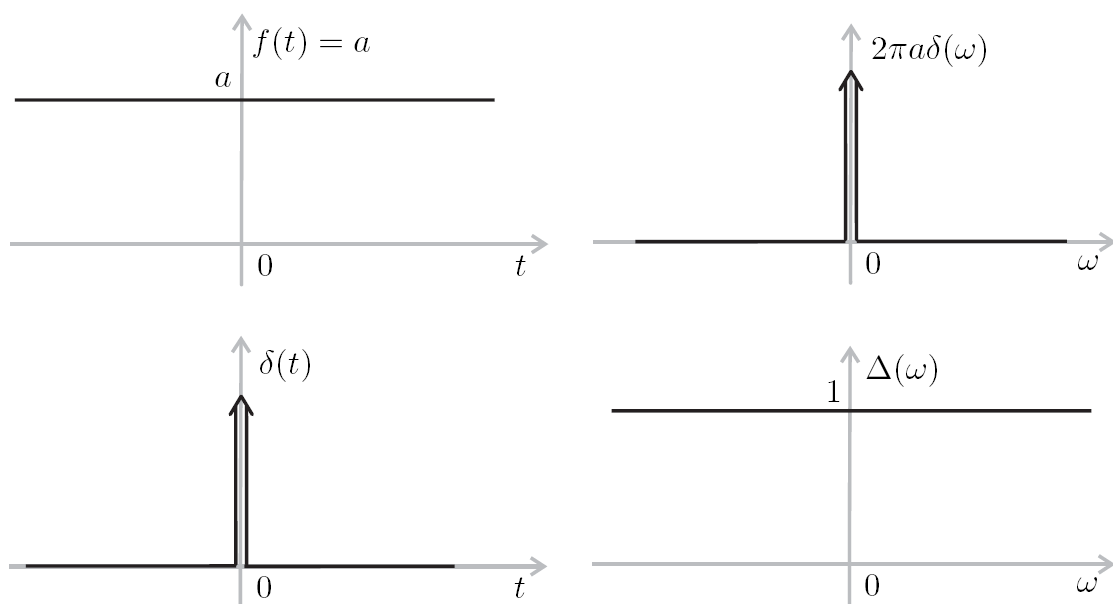
Fourierjeva transformacija funkcije $\delta(t)$ in konstante

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\Delta(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t d\omega .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t dt - ja \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega t dt \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t dt ,\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(a) = 2\pi a \delta(\omega)$$

Fourierjeva transformacija funkcije $\delta(t)$ in konstante



Avtokorelacija neperiodičnih signalov

$$\varphi_{ii}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt$$

Lastnosti:

1. **Hermitova simetrija:** $\varphi_{ii}(-\tau) = \overline{\varphi_{ii}(\tau)}$
2. **Energija signala $f_i(t)$:** $\varphi_{ii}(0) = E_{f_i}$

$$\varphi_{ii}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(t)|^2 dt = E_{f_i}$$

3. **Maksimalnost:** $\varphi_{ii}(0) \geq |\varphi_{ii}(\tau)|$

Avtokorelacija neperiodičnih signalov

Lastnosti

4. **Frekvenčna predstavitev:** $\varphi_{ii}(\tau) \leftrightarrow \phi_{ii}(\omega) = |F_i(\omega)|^2$
5. **Parsevalova enačba:** $\varphi_{ii}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(\omega) d\omega$

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

6. $\phi_{ii}(\omega)$: **spekter energijske gostote**

$$\frac{1}{2\pi} \phi_{ii}(\omega) d\omega \quad : \text{ del energije v signalu } f_i(t) \text{ pri frekvenci } \omega .$$

Avtokorelacija neperiodičnih signalov

Lastnosti

7. Fazni spekter $\Theta_{ii}(\omega) = 0$

$$\phi_{ii}(\omega) = |F_i(\omega)|^2 > 0$$

8. Avtokorelacija ni odvisna od faznega spektra signala $f_i(t)$.

Zato velja: $f_j(t) = f_i(t - t_0) \Rightarrow \varphi_{jj}(\tau) = \varphi_{ii}(\tau)$

9. Zveznost:

Avtokorelacija je zvezna funkcija, če je signal iz katerega jo določamo vsaj odsekoma zvezna funkcija.

Križna korelacija neperiodičnih signalov

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt$$

Lastnosti:

- Antisimetričnost: $\varphi_{ji}(\tau) = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)}$
- Frekvenčna predstavitev:

$$\varphi_{ij}(\tau) \leftrightarrow \phi_{ij}(\omega) = \overline{F_i(\omega)} \cdot F_j(\omega)$$

- Zveznost:

Križna korelacija je zvezna funkcija, če sta signala iz katerih jo določamo vsaj odsekoma zvezna.

Križna korelacija neperiodičnih signalov

- Množica vseh neperiodičnih signalov s končno energijo (energijskih) tvori vektorski prostor
 - Vsota $f_3(t)$ dveh poljubnih energijskih neperiodičnih signalov $f_1(t)$ in $f_2(t)$ je energijski neperiodični signal:

$$f_3(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

- Zmnožek $g(t)$ skalarja (konstante) α s poljubnim energijskim neperiodičnim signalom $f(t)$ je energijski neperiodični signal.

$$g(t) = \alpha f(t)$$

- V vektorskem prostoru neperiodičnih signalov lahko definiramo skalarni produkt

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$$

- Križno korelacijo lahko predstavimo tudi kot skalarni produkt neperiodičnih signalov (vektorjev)

$$\varphi_{ij}(\tau) = \langle f_j(t + \tau), f_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt$$

Križna korelacija neperiodičnih signalov

- Podobnost med signaloma:

$$\varphi_{ij}(\tau) = \langle f_j(t + \tau), f_i(t) \rangle$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \| \vec{x} \| \| \vec{y} \| \cos \theta$$

- Zveza med korelacijo in razdaljo:

$$d^2(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|^2 = \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle$$

$$\begin{aligned} d^2(\vec{x}, \vec{y}) &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - 2\operatorname{Re}(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) . \end{aligned}$$

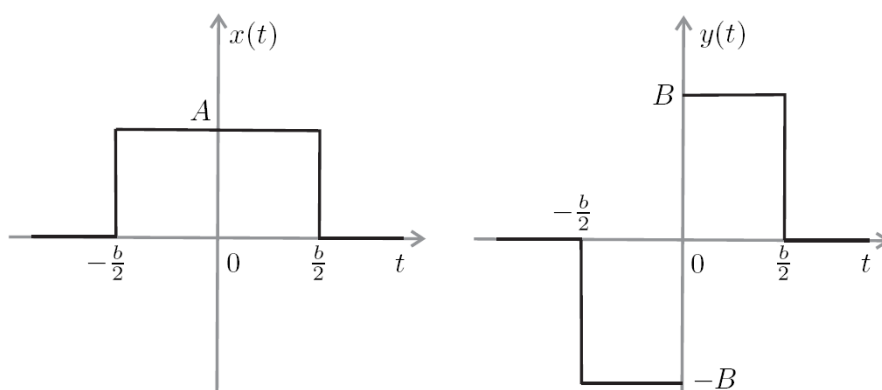
$$d^2(f_j(t + \tau), f_i(t)) = \varphi_{jj}(0) + \varphi_{ii}(0) - 2\operatorname{Re}(\varphi_{ij}(\tau))$$

Velika razdalja → majhna korelacija; majhna razdalja → velika korelacija

Križna korelacija neperiodičnih signalov

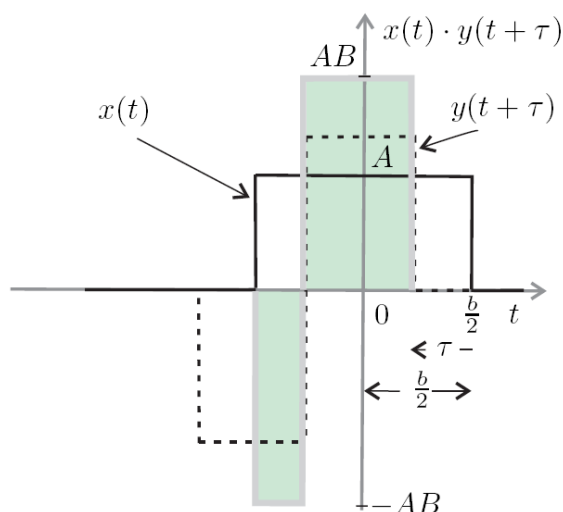
Primer:

Določimo korelacijo $\varphi_{xy}(\tau)$ signalov $x(t)$ in $y(t)$



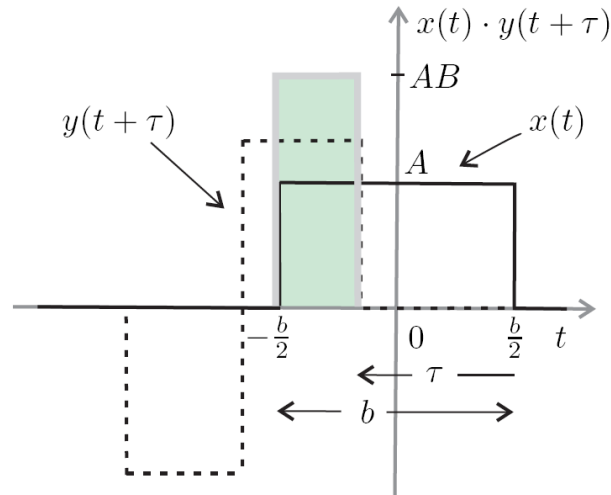
$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt \quad 0 < \tau < \frac{b}{2}$$



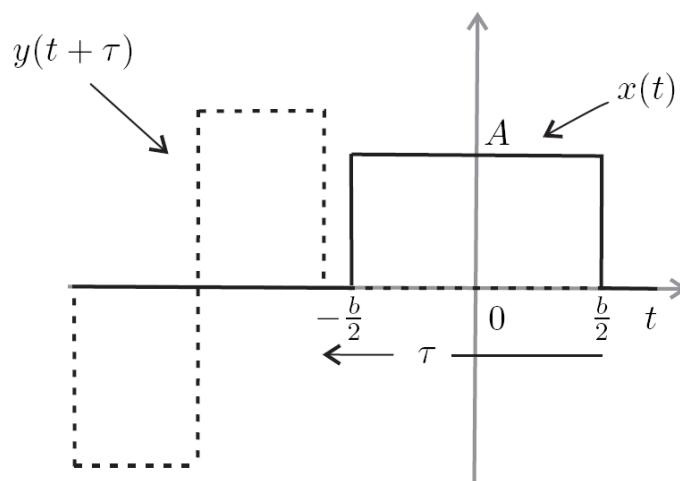
$$\varphi_{xy}(\tau) = AB \cdot \frac{b}{2} - AB \cdot \left(\frac{b}{2} - \tau\right) = AB \cdot \tau$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt \quad \frac{b}{2} < \tau < b$$



$$\varphi_{xy}(\tau) = AB \cdot (b - \tau)$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt \quad \tau > b$$



$$\varphi_{xy}(\tau) = 0$$

Simetrije: $x(-t) = x(t)$ in $y(-t) = -y(t)$

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) = P(\omega) \in \mathbb{R} \quad \text{in} \quad P(-\omega) = P(\omega) ,$$

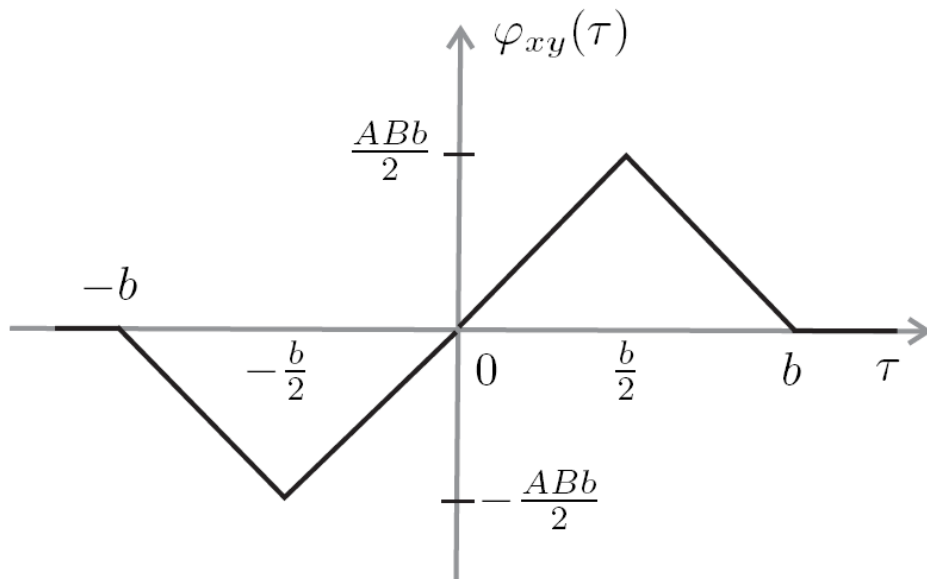
$$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = jQ(\omega) \in \mathbb{I} \quad \text{in} \quad Q(-\omega) = -Q(\omega) ,$$

$$\varphi_{xy}(\tau) \longleftrightarrow \phi_{xy}(\omega) = jP(\omega)Q(\omega) \in \mathbb{I} \quad \text{in} \quad \phi_{xy}(-\omega) = -\phi_{xy}(\omega) .$$

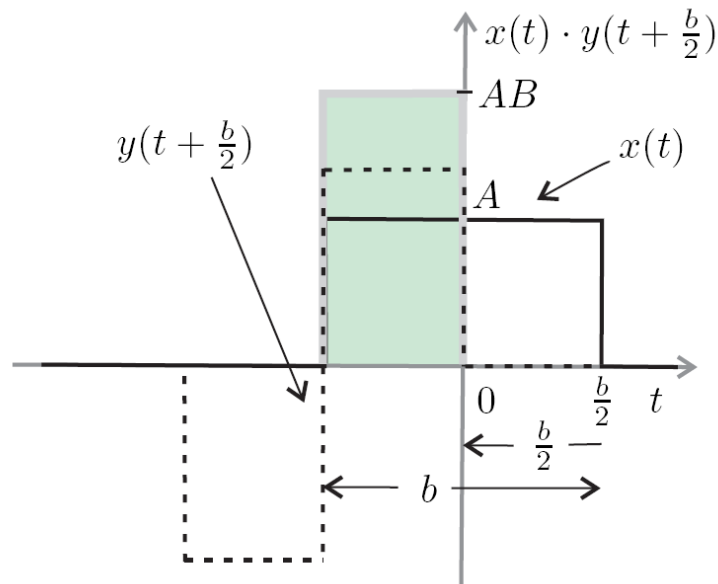
$$\varphi_{xy}(-\tau) = -\varphi_{xy}(\tau)$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \begin{cases} -AB \cdot (b + \tau) , & -b < \tau \leq -\frac{b}{2} \\ AB \cdot \tau , & -\frac{b}{2} < \tau \leq +\frac{b}{2} \\ AB \cdot (b - \tau) , & +\frac{b}{2} < \tau < +b \\ 0 , & \text{drugod} . \end{cases}$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t + \tau)dt$$



Maksimum $\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t + \tau)dt$



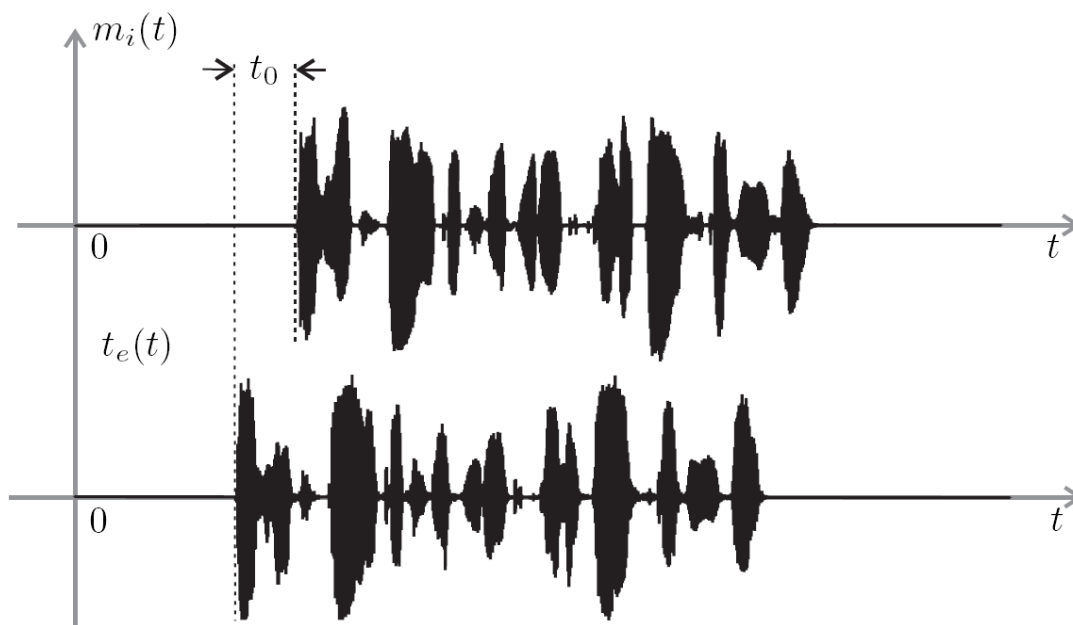
Primer: poravnava signalov

Vzporedno zajemanje govornih signalov za pridobivanje govorne zbirke



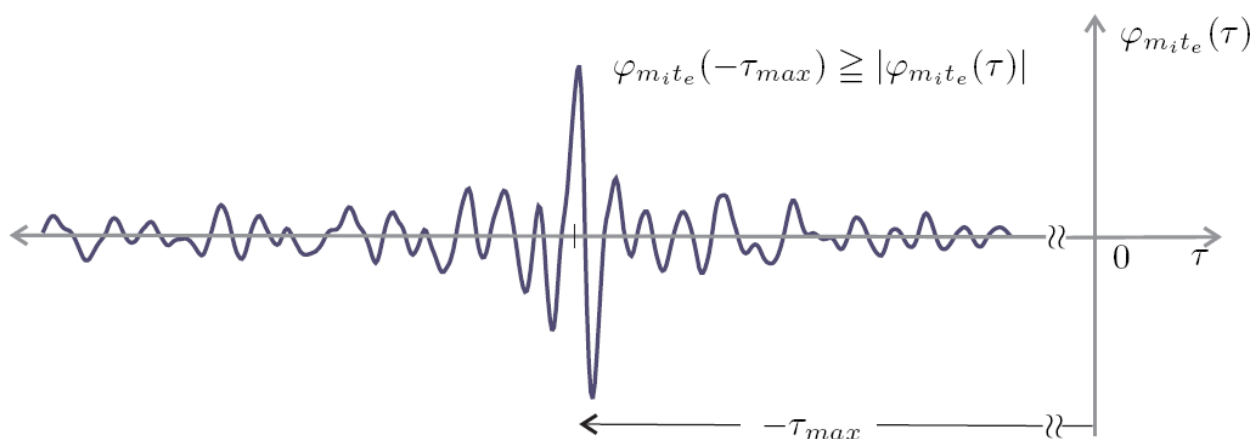
Primer: poravnava signalov

Signali niso bili časovno sinhronizirani



Primer: poravnava signalov

Določanje križne korelacije $\varphi_{m_i t_e}(\tau)$ in iskanje maksimuma



Konvolucija neperiodičnih signalov

$$\varrho_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) f_j(\tau - t) dt = f_i(\tau) * f_j(\tau)$$

Lastnosti:

- Simetričnost $f_i(\tau) * f_j(\tau) = f_j(\tau) * f_i(\tau)$
- Časovni zamik $\varrho_{ij}(\tau - t_0) = f_i(\tau - t_0) * f_j(\tau)$

$$\begin{aligned} f_i(\tau - t_0) * f_j(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t - t_0) f_j(\tau - t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t') f_j(\tau - (t' + t_0)) dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t') f_j((\tau - t_0) - t') dt' = \varrho_{ij}(\tau - t_0) \end{aligned}$$

Konvolucija neperiodičnih signalov

Lastnosti

- Frekvenčna predstavitev:

$$\varrho_{ij}(\tau) \longleftrightarrow R_{ij}(\omega) = F_i(\omega) \cdot F_j(\omega)$$

- Frekvenčna predstavitev zmnožka $f_i(t) \cdot f_j(t)$:

$$f_i(t) \cdot f_j(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_i(\omega) * F_j(\omega)$$

- Zveznost

Konvolucija je zvezna funkcija, če sta signala iz katerih jo določamo vsaj odsekoma zvezna.

Konvolucija neperiodičnih signalov

Lastnosti

- Zveza med korelacijo in konvolucijo:

$$\varphi_{ij}(\tau) = \overline{f_i(-\tau)} * f_j(\tau)$$

– Posledica

Če je $f_i(t) = \overline{f_i(-t)}$, je korelacija enaka konvoluciji.

V primeru, ko je $f_i(t)$ realen signal, se ta pogoj spremeni v pogoj sodosti:

$$f_i(t) = f_i(-t)$$

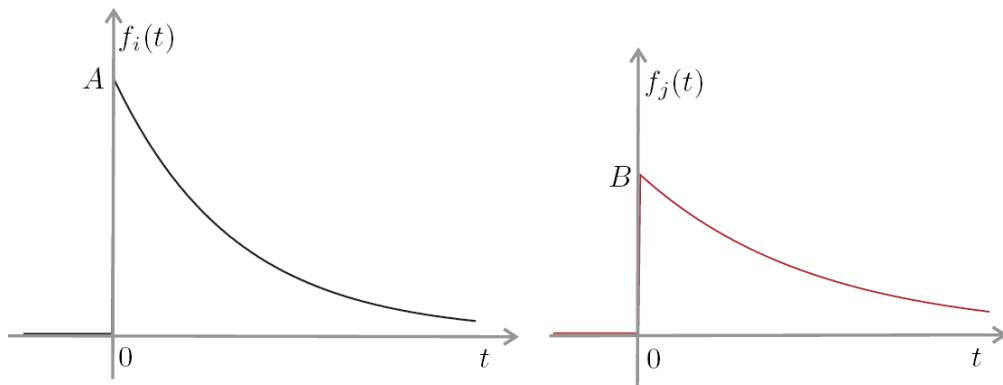
Konvolucija neperiodičnih signalov

Primer

Določi križno korelacijo in konvolucijo signalov

$$f_i(t) = \begin{cases} A e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}, \quad A, a > 0$$

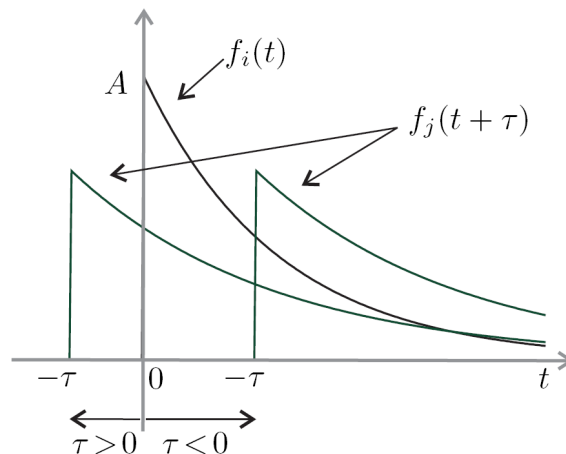
$$f_j(t) = \begin{cases} B e^{-bt}, & t > 0 \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}, \quad B, b > 0$$



Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Primer

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) f_j(t + \tau) dt$$



Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Primer

$$\tau > 0$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\tau) &= \int_0^{\infty} f_i(t) f_j(t + \tau) dt = \int_0^{\infty} A e^{-at} B e^{-b(t+\tau)} dt \\ &= AB e^{-b\tau} \int_0^{\infty} e^{-(a+b)t} dt = -\frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} e^{-(a+b)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} . \end{aligned}$$

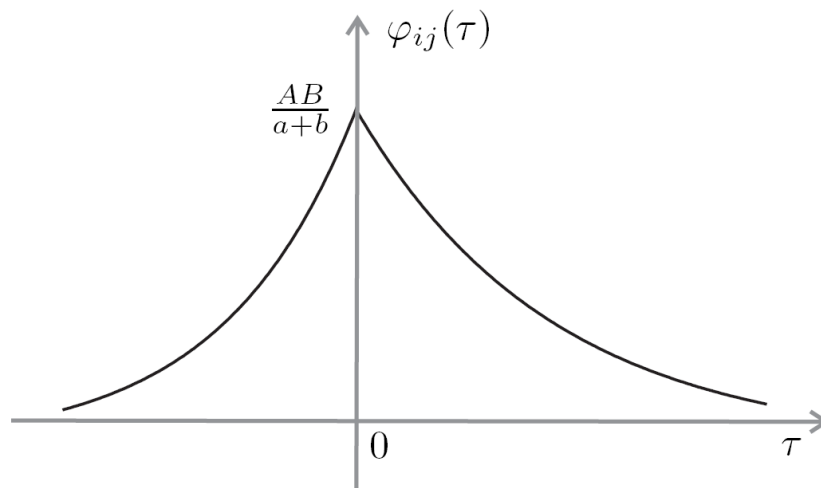
$$\tau < 0$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\tau) &= AB e^{-b\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-(a+b)t} dt = -\frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} e^{-(a+b)t} \Big|_{-\tau}^{\infty} \\ &= \frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} e^{(a+b)\tau} = \frac{AB}{a+b} e^{a\tau} . \end{aligned}$$

Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Primer

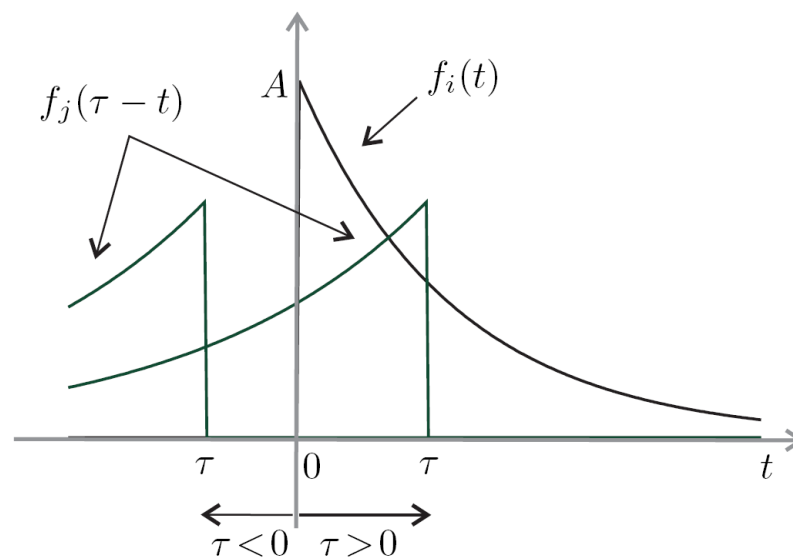
$$\varphi_{ij}(\tau) = \begin{cases} \frac{AB}{a+b} e^{a\tau} , & \tau \leq 0 \\ \frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} , & \tau \geq 0 \end{cases}$$



Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Primer

$$\varrho_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) f_j(\tau - t) dt$$



Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Primer

$$\tau < 0$$

$$\varrho_{ij}(\tau) = 0$$

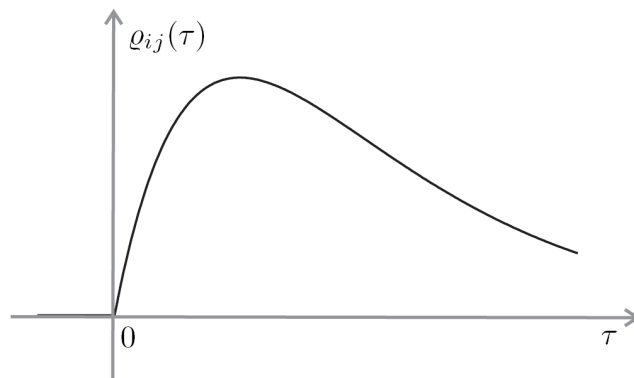
$$\tau > 0$$

$$\begin{aligned}\varrho_{ij}(\tau) &= \int_0^\tau f_i(t) f_j(\tau - t) dt = \int_0^\tau A e^{-at} B e^{-b(\tau-t)} dt \\ &= AB e^{-b\tau} \int_0^\tau e^{(b-a)t} dt = \frac{AB}{b-a} e^{-b\tau} e^{(b-a)t} \Big|_0^\tau \\ &= \frac{AB}{b-a} e^{-b\tau} (e^{(b-a)\tau} - 1) = \frac{AB}{b-a} (e^{-a\tau} - e^{-b\tau})\end{aligned}$$

Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Primer

$$\varrho_{ij}(\tau) = \begin{cases} 0 & , \tau \leq 0 \\ \frac{AB}{b-a} (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) & , \tau \geq 0 \end{cases}$$



Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

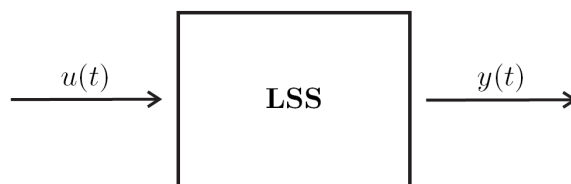
Primer

$$a = b$$

$$\begin{aligned}\varrho_{ij}(\tau) &= \int_0^\tau f_i(t) f_j(\tau - t) dt = \int_0^\tau A e^{-at} B e^{-a(\tau-t)} dt \\ &= AB e^{-a\tau} \int_0^\tau dt = AB e^{-a\tau} t \Big|_0^\tau = AB e^{-a\tau} \tau .\end{aligned}$$

Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Linearni stacionarni sistemi



- Linearnost

$$u_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad \text{in} \quad u_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$

$$u_1(t) + u_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

$$u(t) \longrightarrow y(t) \implies \alpha u(t) \longrightarrow \alpha y(t)$$

- Stacionarnost

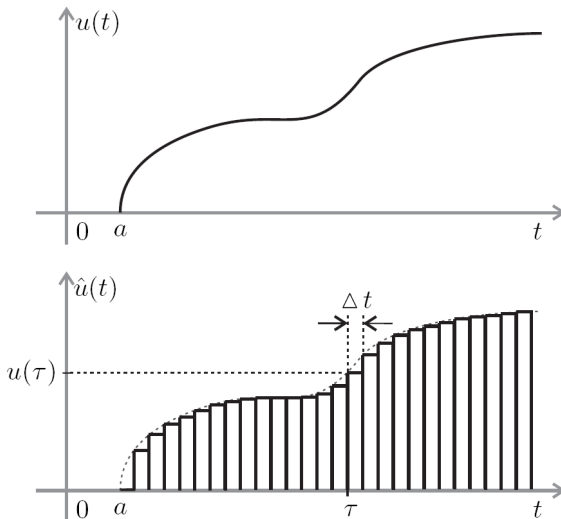
$$u(t) \longrightarrow y(t) \implies u(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0)$$

Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Linearni stacionarni sistemi

Naj bo $h(t)$ odziv sistema na enotin impulz $\delta(t)$

- $h(t) = 0$, $t < 0$
- $h(t)$ je energijski signal



$u(t)$ poljuben vhodni signal

$u(t) = 0$, če je $t < a$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow dt} \hat{u}(t) = u(t)$$

$dy(t)$ naj bo delni odziv sistema na pravokotni imulz višin $u(\tau)$ pri času τ in širine $d\tau$

Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Linearni stacionarni sistemi

- Stacionarnost

$$\delta(t - \tau) \longrightarrow h(t - \tau)$$

- Sorazmernost

$$\frac{u(\tau)d\tau}{1} = \frac{dy(t)}{h(t - \tau)}$$

$$dy(t) = u(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Linearnost

$$y(t) = \int_a^t u(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Linearni stacionarni sistemi

$$y(t) = \int_a^t u(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau = u(t) * h(t)$$

$$y(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

Fourierjeva transformacija

$H(\omega) = \mathcal{F}(h(t))$ Prevajalna (prenosna) funkcija sistema

$$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega)$$

Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

Linearni stacionarni sistemi

- Določanje impulznega odziva $h(t)$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\omega))$$

Konvolucija neperiodičnih signalov

Predstavitev Fourierjevega integrala

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

- Funkcija $\delta(t)$ je enota za konvolucijo

$$f(t) = f(t) * \delta(t)$$

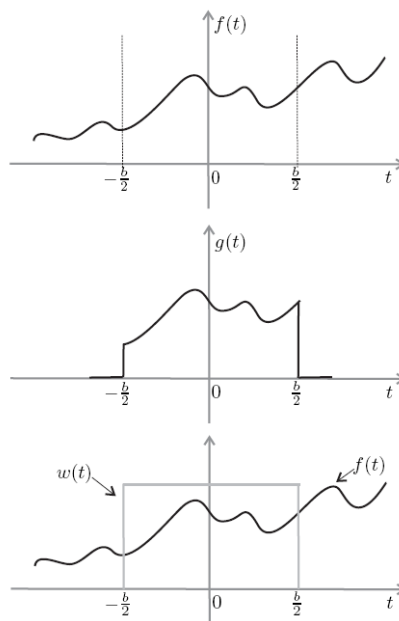
Ker je konvolucija simetrična in $\delta(t) = \delta(-t)$, je

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = \delta(-t) * f(t) = \varphi_{\delta f}(t)$$

- Funkcija $\delta(t)$ je enota za korelacijo

Konvolucija neperiodičnih signalov

Oknenje



Konvolucija neperiodičnih signalov

Oknenje

$$g(t) = w(t) \cdot f(t)$$

$$w(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod} \end{cases}$$

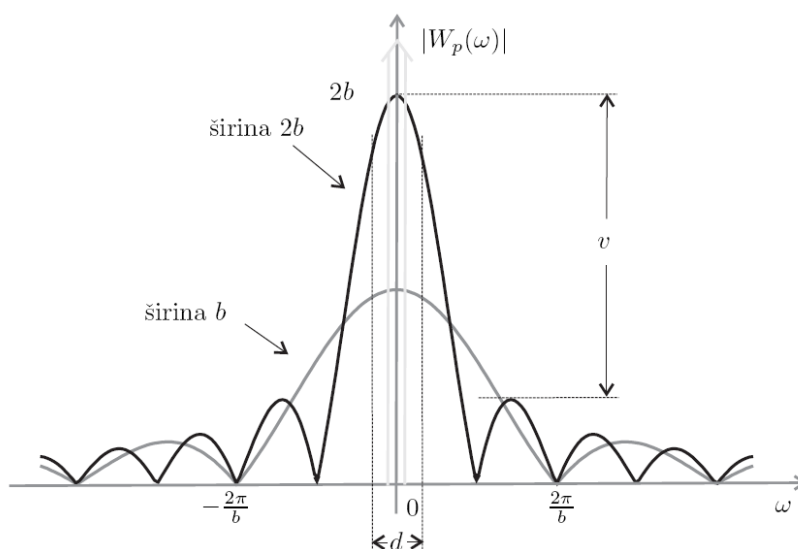
$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} W(\omega) * F(\omega)$$

$W(\omega) = \delta(\omega)$ Funkcija $\delta(\omega)$ je enota za konvolucijo.

Konvolucija neperiodičnih signalov

Oknenje

Spekter okenske funkcije naj bo čimbolj podoben funkciji $\delta(\omega)$



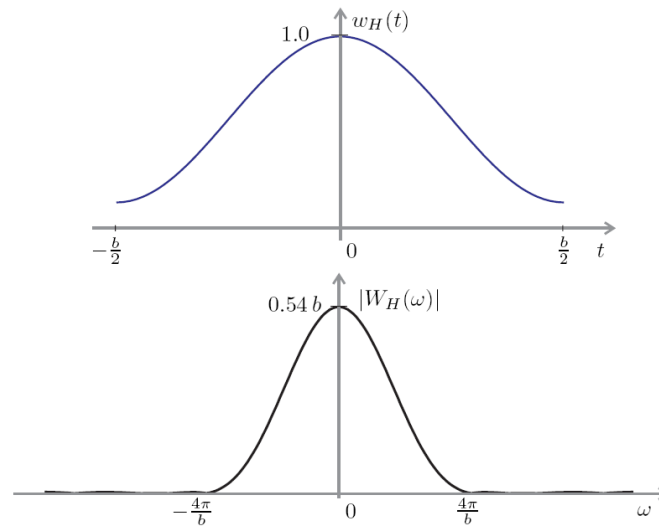
Spektra pravokotne okenske funkcije pri širini oken b in $2b$

Konvolucija neperiodičnih signalov

Oknenje

Hammingovo okno

$$w_H(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi}{b} t, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$

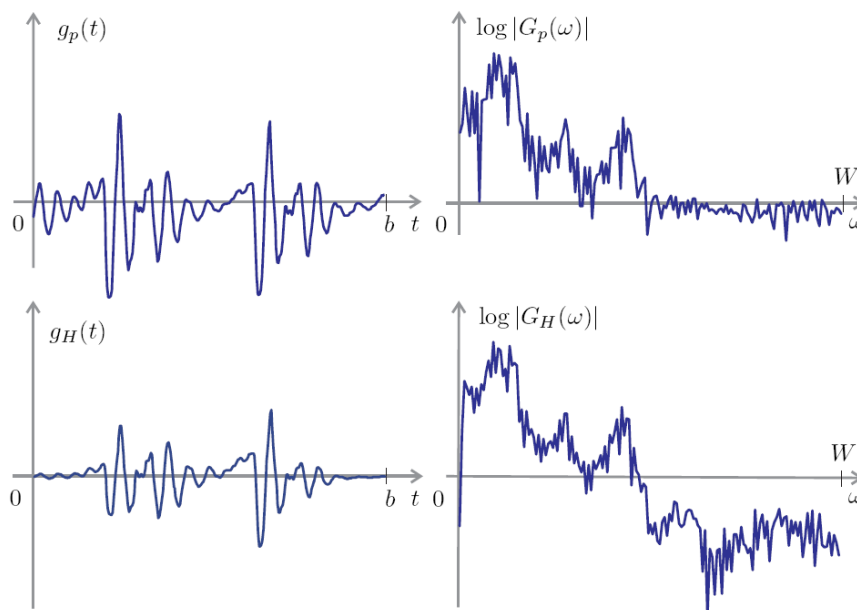


Konvolucija neperiodičnih signalov

Oknenje

Ocena spektra

Oknenje govornega signala s pravokotnim in Hammingovim oknom



8 Obdelava naključnih signalov

V tem poglavju predstavimo osnove obdelave naključnih signalov.

Poglavje obravnava:

- definicijo naključnih signalov,
- osnove predpostavke v zvezi z naključnimi signali,
- stacionarnost naključnih signalov,
- avtokorelacija naključnih signalov,
- lastnosti avtokorelacije naključnih signalov, in
- različne praktične primere.

Naključni signali

Deterministične signale (periodične, neperiodične) oddajajo fizikalni procesi (postopki), ki se pri ponavljanju preizkusa in nespremenjenih zunanjih pogojih vedno enako odzivajo.

Če preizkusa ne moremo ponoviti pod enakimi pogoji, tudi odzivi niso vedno enaki. Take odzive imenujemo naključne odzive oziroma **naključne signale**.

Definicije:

- **Naključni signal** je signal katerega obnašanje v prihodnosti ne moremo natanko napovedati.
- **Fazni prostor** imenujemo množico vseh možnih amplitud (vrednosti), ki jih naključni signal lahko zavzame.
- Vir (sistem), ki oddaja naključne signale imenujemo **naključni vir** ali **naključni proces**.

Naključni signali Uvod

Privzetki

Da si olajšamo obravnavo naključnih signalov privzamemo:

- Naključni signal obravnavamo kot signal z **neskončnim časom trajanja** ($-\infty < t < +\infty$).
- Opazujemo obnašanje (ne ene same) **skupine (množice) naključnih signalov**, ki jih oddajajo podobni viri.
- Množica opazovanih signalov je po svoji **moči (številu elementov) neomejena**.

Oceno (**vzorec**) te množice v realnosti dobimo tako, da določen naključni vir zaporedoma rojeva signale. Ti so po trajanju končni in jih je končno število.

Naključni signali

Uvod

Karakteristike signalov:

Deterministični signali

- Natančna časovna odvisnost.
- Določena slika v frekvenčnem prostoru.

Naključni signali

- Poznamo le preteklost. V prihodosti more signal z določeno verjetnostjo zavzeti vse vrednosti v svojem farnem prostoru.
- Iz preteklosti signala lahko njegov spekter le delno ocenimo.

Zaključek:

Za vrednostenje lastnosti naključnega signala potrebujemo deterministične karakteristike (signali, ki so izvedeni iz množice naključnih signalov in so deterministični).

Naključni signali

Stacionarnost

Privzetek o stacionarnosti:

Vzemimo, da se verjetnostne porazdelitve amplitud signala (statistične lastnosti signala) s časom ne spreminjajo. Naključni vir, ki generira take signale imenujemo **stacionaren**. Vrsto naključnega signala, ki ga generira tak vir pa **stacionarni naključni signal**.

Posledice:

1. Enostavne deterministične karakteristike (karakteristike prvega reda) so od časa neodvisne:
 - srednja vrednost
 - varianca
 - standardna deviacija
 - verjetnostna porazdelitev amplitud signala
 -
2. Stacionaren naključen signal ne more biti energijski.

Naključni signali

Stacionarnost

3. Naj bo $f_i(t)$ stacionaren naključni signal s končno močjo.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f_i(t)|^2 dt < \infty$$

Pokazati je mogoče, da je v tem primeru funkcija

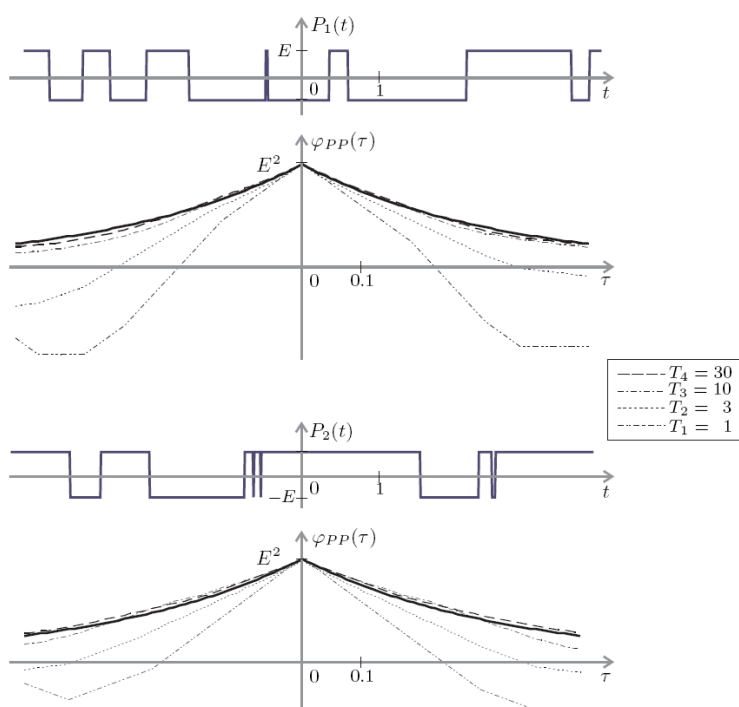
$$\varphi_{ii}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt$$

deterministični energijski signal, definiran na celi časovni osi.

Ta signal imenujemo **avtokorelacija** naključnega signala $f_i(t)$ in je pomembna deterministična karakteristika naključnega signala (karakteristika drugega reda).

Naključni signali - Določanje avtokorelacije

$$\varphi_{PP}(\tau) \approx \frac{1}{2T_i} \int_{-T_i}^{T_i} P_j(t) P_j(t + \tau) dt \quad j = 1, 2.$$



$P(t)$: Poissonov val

Teoretični izračun:

$$\varphi_{PP}(\tau) = E^2 e^{-2\kappa|\tau|}$$

Naključni signali

Lastnosti avtokorelacije

1. **Hermitova simetrija**

$$\varphi_{ii}(\tau) = \overline{\varphi_{ii}(-\tau)}$$

2. **Moč**

$$\varphi_{ii}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f_i(t)} f_i(t) dt = P_{f_i}$$

3. **Maksimalnost**

$$\varphi_{ii}(0) \geq |\varphi_{ii}(\tau)|$$

4. **Limitna vrednost pri $\tau = \pm\infty$**

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_{ii}(\tau) = 0$$

Naključni signali

Lastnosti avtokorelacije

5. **Wienerjev izrek** (Eksistenca Fourierjeve in inverzne Fourierjeve transformacije avtokorelacije)

$$\phi_{ii}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$\phi_{ii}(\omega) \geq 0 \text{ zato je } |\phi_{ii}(\omega)| = \phi_{ii}(\omega) \text{ in } \Theta_{ii}(\omega) = 0$$

Naključni signali

Lastnosti avtokorelacije

6. $\phi_{ii}(\omega)$: spekter močnostne gostote

$$\varphi_{ii}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) d\omega \quad P_{f_i} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) d\omega$$

$\frac{1}{2\pi} \phi_{ii}(\omega) d\omega$: del moči signala $f_i(t)$ pri frekvenci ω .

7. Zveznost

- Avtokorelacija je zvezna, če je naključni signal iz katerega jo določamo vsaj odsekoma zvezna funkcija.
- Avtokorelacija je zvezna, če je zvezna v izhodišču.

8. Soodvisnost amplitud signala

- Avtokorelacijo naključnih signalov lahko uporabljamo kot mero za soodvisnost amplitude signala f_i pri času $t + \tau$ od amplitude pri času t .

Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

$$f(t) = S(t) + N(t)$$

$S(t)$: periodičen signal z osnovno periodo T_0

$N(t)$: stacionaren naključni signal

- Ali je $S(t) \neq 0$?
- Če je $S(t) \neq 0$, kolikšna je njegova perioda T_0 ?
- Kakšen je potek signala $S(t)$?

Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

Postopek z avtokorelacijo

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) f(t + \tau) dt$$

$$f(t) = S(t) + N(t),$$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (S(t) + N(t))(S(t + \tau) + N(t + \tau)) dt \\ &= \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{SN}(\tau) + \varphi_{NS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau). \end{aligned}$$

$$\varphi_{SN}(\tau) = \varphi_{NS}(\tau) = 0$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau)$$

Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

Postopek z avtokorelacijo

$$\varphi_{SS}(\tau + T_0) = \varphi_{SS}(\tau), \quad \text{za vsak } \tau,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_{NN}(\tau) = 0.$$

Za $\tau \gg T_0$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) \approx \varphi_{SS}(\tau) &\Rightarrow S(t) \neq 0 \\ \varphi(\tau) \approx 0 &\Rightarrow S(t) = 0 \end{aligned}$$

Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

Zgled

$$S(t) = \begin{cases} -E & , \quad -b < t \leq 0 \\ E & , \quad 0 < t \leq b \\ S(t + n2b) = S(t) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} \end{cases}$$

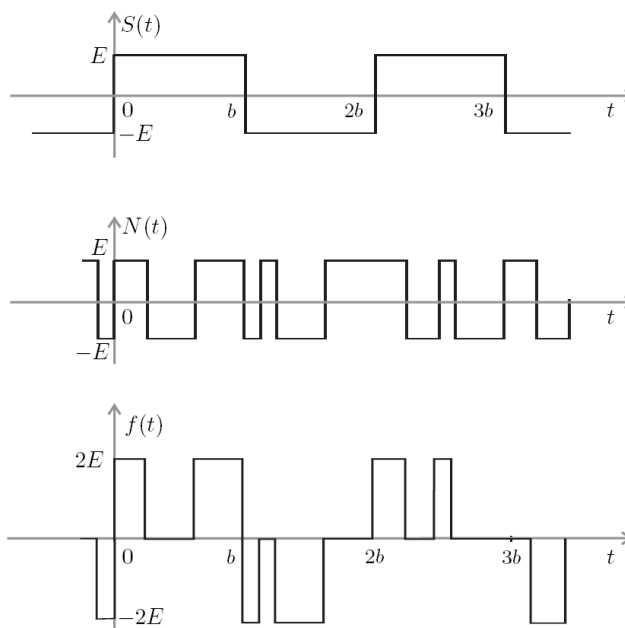
$N(t)$: Poissonov val

$$f(t) = S(t) + N(t)$$

Določimo $\varphi(\tau) = \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau)$

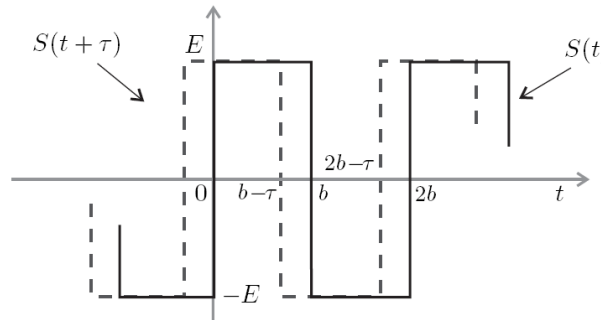
Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

Zgled



Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

Zgled



$$0 \leq \tau \leq b$$

$$\varphi_{SS}(\tau) = \frac{E^2}{2b} \left(\int_0^{b-\tau} dt - \int_{b-\tau}^b dt + \int_b^{2b-\tau} dt - \int_{2b-\tau}^{2b} dt \right) = \frac{E^2}{b}(b - 2\tau)$$

$$-b \leq \tau \leq b$$

$$\varphi_{SS}(\tau) = \frac{E^2}{b}(b - 2|\tau|)$$

Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

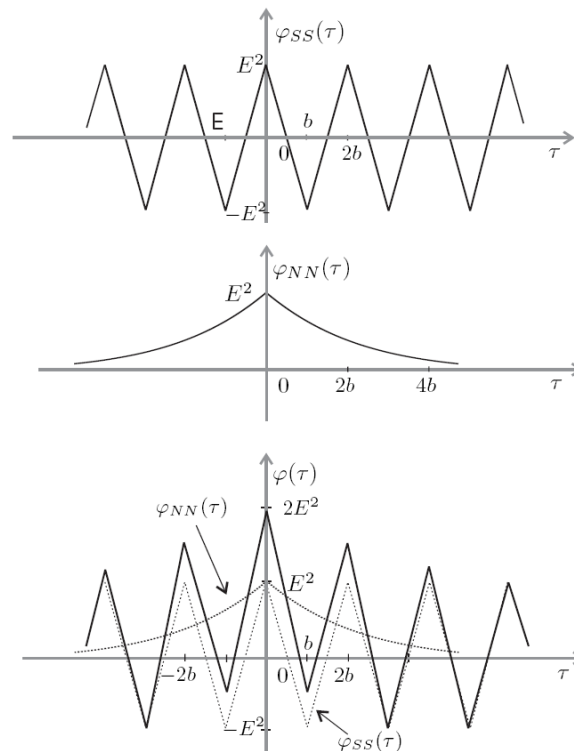
Zgled

$$\varphi_{NN}(\tau) = E^2 e^{-2\kappa|\tau|}$$

$$\varphi(\tau) = E^2 e^{-2\kappa|\tau|} + \begin{cases} \frac{E^2}{b}(b - 2|\tau|) & , \quad -b \leq \tau \leq b \\ \varphi_{SS}(\tau + n2b) = \varphi_{SS}(\tau) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} \end{cases}$$

Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

Zgled



Odkrivanje zvenečih in nezvenečih delov govora ter določanje intonacije

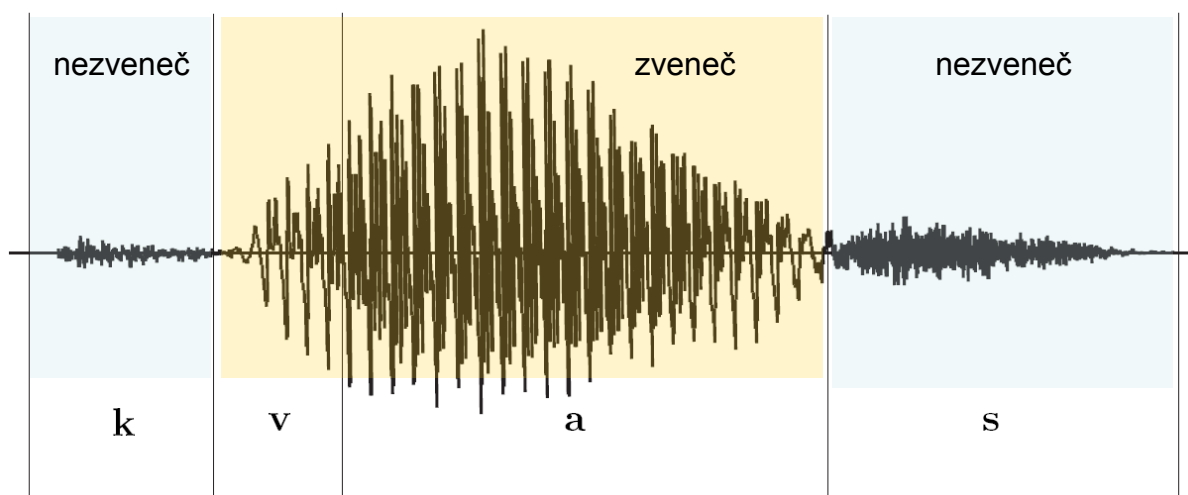
- Govor je sestavljen iz akustično različnih delov (glasov), opredelimo ga kot **ne-stacionaren naključni signal**.
- Glasove delimo na zveneče in nezveneče.
- Zveneči glasovi na dovolj kratkem časovnem intervalu lahko opredelimo kot signale s vsebovano periodično komponento.

- periodična komponenta se v govoru pojavlja le pri zvenečih delih,
- perioda periodične komponente se s časom spreminja,
- frekvenčni obseg govornega signala je med 25 Hz in 10 kHz,
- intonacija se pri običajnem govoru giblje med 25 Hz in 250 Hz.

Za določanje periodične komponente je potrebno uporabiti postopek z avtokorelacijo!

Odkrivanje zvenečih in nezvenečih delov govora ter določanje intonacije

Govorni signal



Odkrivanje zvenečih in nezvenečih delov govora ter določanje intonacije

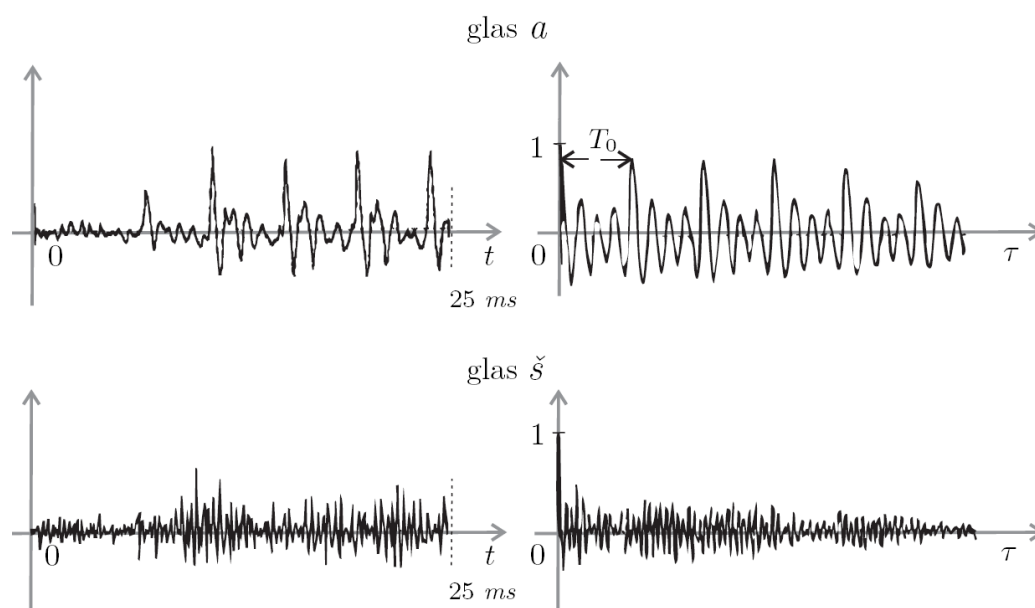
$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)f(t + \tau)dt \approx \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{+T_1} f(t)f(t + \tau)dt$$

vzorčenje

$$\varphi(kt_0) \approx \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{+T_1} f(t)f(t + kt_0)dt \approx \frac{1}{2N} \sum_{i=-N}^{+N} f(it_0)f(it_0 + kt_0)$$

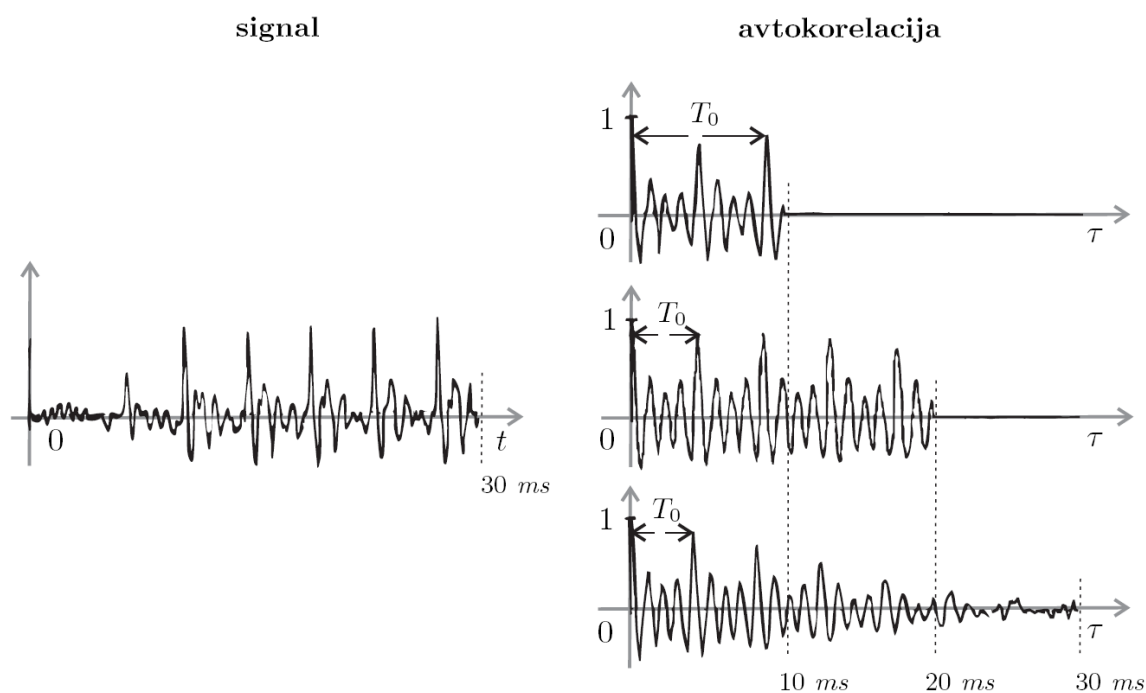
Odkrivanje zvnečih in nezvnečih delov govora ter določanje intonacije

Primerjava zvneč : nezvneč del govora



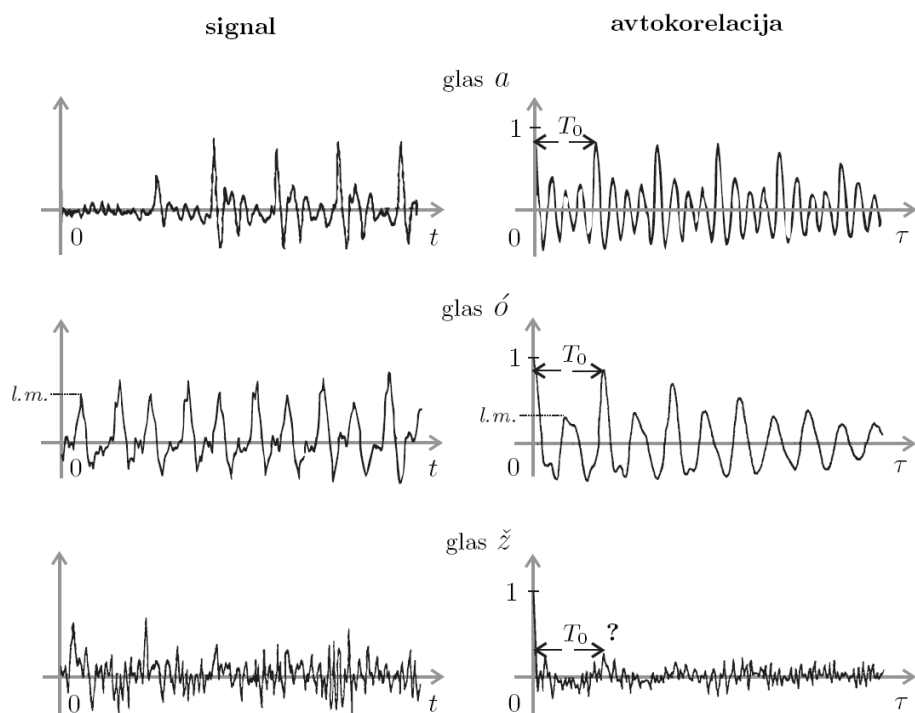
Odkrivanje zvnečih in nezvnečih delov govora ter določanje intonacije

Vpliv širine izreza ($2T_1$) signala na obliko avtokorelacije



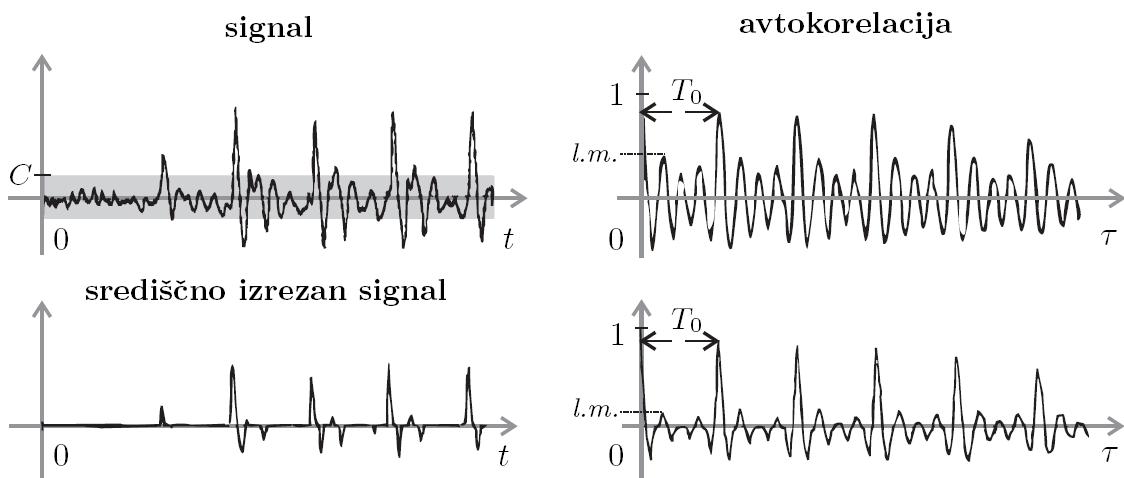
Odkrivanje zvonečih in nezvonečih delov govora ter določanje intonacije

Vpliv oblike signala na avtokorelacijo



Odkrivanje zvonečih in nezvonečih delov govora ter določanje intonacije

Središčno izrezovanje signala



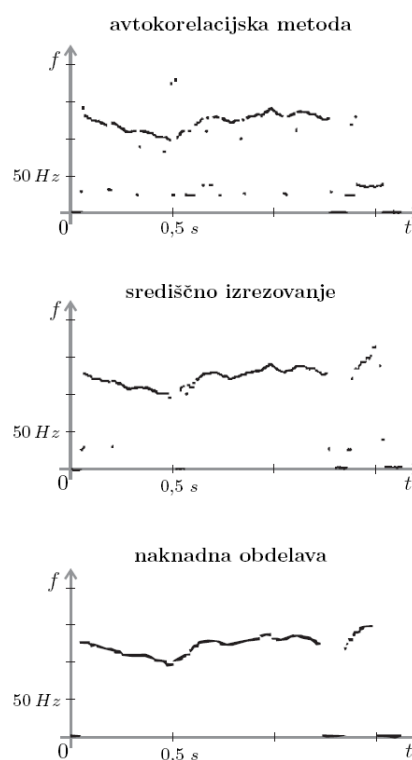
Sistem za določanje intonacije govora z avtokorelacijo

- nizko pasovno filtriranje,
- določanje avtokorelacije z uporabo središčnega izrezovanja signala in ocena zvonečnosti ter intonacije,
- naknadna obdelava rezultatov.

Sistem za določanje intonacije govora z avtokorelacijo

Izgovorjen stavek:

<premor> *We were away a year ago* <premor>



9 Digitalni signali

V tem poglavju so predstavljeni digitalni signali in osnovni pristopi k obdelavi digitalnih signalov.

Poglavje obravnava:

- vzorčenje,
 - vzorčenje s stalnim časovnim razmakom,
 - izrek o vzorčenju (Shannonov izrek),
- kvantizacijo,
 - signal kvantizacijske napake,
 - lastnosti,
- diskretno Fourierjevo transformacijo (DFT),
 - FFT,
 - definicija DFT,
 - lastnosti,
 - uporaba DFT pri analizi LSS,
 - primeri uporabe.

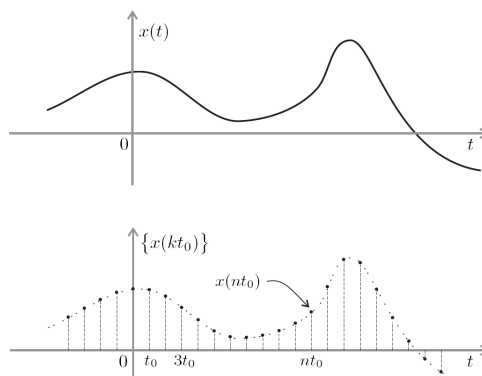
Digitalni signali

digitalizacija: vzorčenje $\longrightarrow$ kvantizacija
 kvantizacija $\longrightarrow$ vzorčenje

Vzorčenje $S : x(t) \rightarrow \{\dots, x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots\}$

Vzorčenje s stalnim časovnim razmakom t_0

$S : x(t) \rightarrow \{\dots, x(-2t_0), x(-t_0), x(0), x(t_0), \dots\}$



Digitalni signali Vzorčenje

- **Izrek o vzorčenju** (*Shannonov izrek*)

Naj bo $x(t)$ zvezen frekvenčno omejen signal s frekvenčnim obsegom $(0, F)$. Signal je popolnoma določen, če poznamo njegove vrednosti, ki si sledijo v stalnih časovnih razmakih širine t_0 , kjer je

$$t_0 = \frac{1}{2F}.$$

$x(t)$ je določen z enačbo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_0) \frac{\sin 2\pi F(t - nt_0)}{2\pi F(t - nt_0)}$$

- $t_0 > \frac{1}{2F}$ signala ni več mogoče rekonstruirati brez napak.
- $t_0 < \frac{1}{2F}$ signal je še vedno možno rekonstruirati
(poveča se število vzorcev).

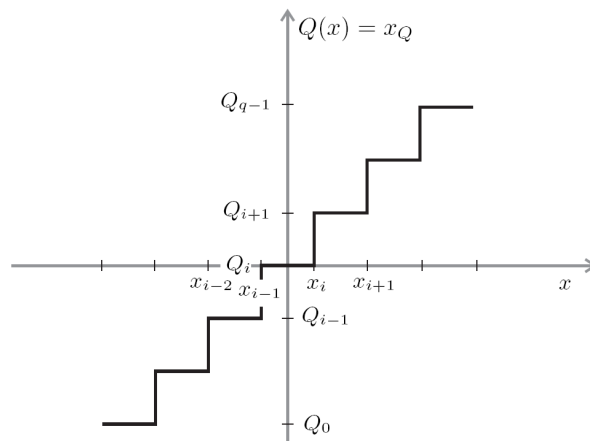
Digitalni signali

Kvantizacija

Kvantizacija $Q : x(t) \longrightarrow x_Q(t)$,

$$x_Q(t) = Q(x(t))$$

Posameznim podintervalom $[x_{i-1}, x_i)$ vrednosti amplitud signala $x_{i-1} \leq x(t) < x_i$ predpiše natanko določeno vrednost Q_i .



Digitalni signali

Kvantizacija

- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$: kvantizacijski razmik
- $q = 2^n$: število kvantizacijskih nivojev
- n : število bitov kvantizatorja
- $\Delta x_i = \Delta x$: linearna kvantizacija

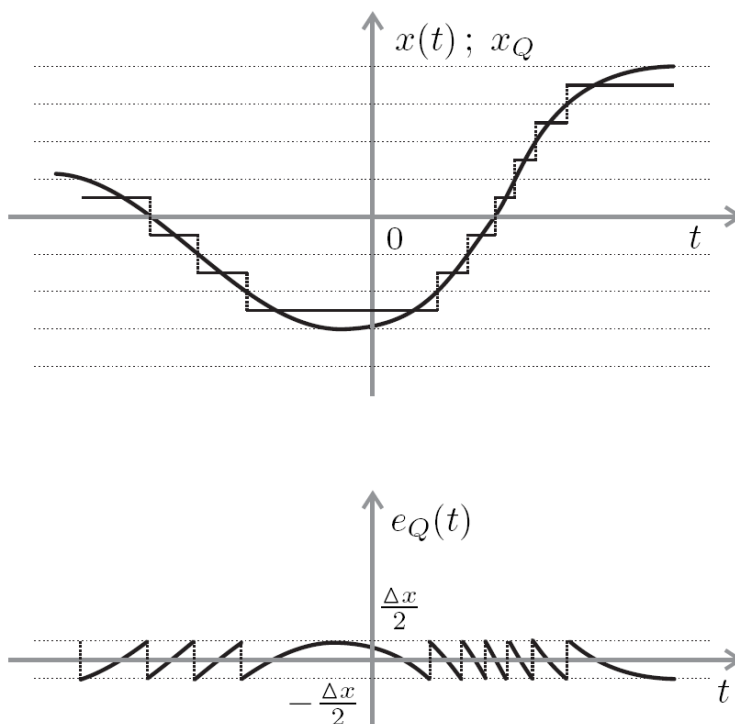
Signal kvantizacijske napake $e_Q(t)$

$$e_Q(t) = x_Q(t) - x(t)$$

$$x_Q(t) = x(t) + e_Q(t)$$

Digitalni signali

Signal kvantizacijske napake



Digitalni signali

Signal kvantizacijske napake

Lastnosti:

- $|e_Q(t)| < \frac{\Delta x}{2}$
- **Povprečna moč** $P_Q \approx \frac{\Delta x^2}{12}$, $q > 128$
- **Spekter močnostne gostote** $\phi_{QQ}(\omega)$

Naj bo $x(t)$ stacionaren ergodičen signal, ki je amplitudno omejen na območje 8–kratne standardne deviacije signala,

$$-4\sigma < x(t) < +4\sigma ,$$

in frekvenčno omejen z mejno frekvenco F ($W = 2 \pi F$).

$$\phi_{QQ}\left(\frac{\omega}{W}\right) = \phi_{QQ}(\gamma) \approx \frac{k}{4\pi^3} \sqrt{\frac{3k}{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{3k\gamma^2}{8n^2\pi}}$$

Digitalni signali

Spekter močnostne gostote $\phi_{QQ}(\omega)$

- Za $q > 128$
je spekter približno konstanten na območju

$$|\gamma| < 40$$

40 širše območje od frekvenčnega obsega signala, ki ga kvantiziramo.

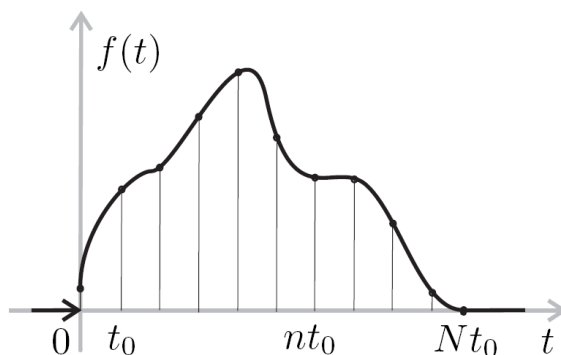
- Signal kvantizacijske napake $e_Q(t)$ lahko opredelimo kot **beli šum** (naključni signal katerega spekter močnostne gostote je konstanten).
- Razmerje med močjo P_S signala, ki ga kvantiziramo in močjo P_Q signala kvantizacijske napake v decibelih lahko za $q > 128$ ocenimo z

$$10 \log \frac{P_S}{P_Q} \approx 6n - 7,2 \quad [\text{dB}]$$

Diskretna Fourierjeva Transformacija Izpeljava

Diskretna Fourierjeva transformacija (DFT) je numerični postopek za oceno spektra $F(\omega)$ signala $f(t)$, ki smo ga predhodno vzorčili in pridobili $\{f(nt_0)\}$.

FFT (Fast Fourier Transform) postopek, ki omogoča izračun **DFT** z minimalnim številom aritmetičnih operacij



$$f(t) = 0 \iff t < 0 \text{ ali } t \geq Nt_0$$

Izpeljava

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$dt \longrightarrow t_0 ,$$

$$t \longrightarrow nt_0 ,$$

$$\int \longrightarrow \sum$$

$$F(\omega) = \int_0^{Nt_0} f(t) e^{-j\omega t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-j\omega t_0 n} t_0$$

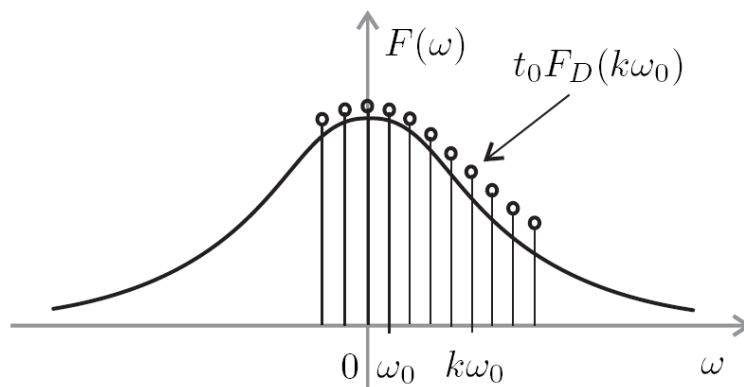
$$F(\omega) \big|_{\omega=k\omega_0} \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} t_0 = t_0 \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n}$$

Definicija **DFT**

Izraz $F_D(k\omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n}$ imenujemo

Diskretna Fourierjeva transformacija (DFT) vzorčenega signala $\{f(nt_0)\}$.

$$F(\omega) \big|_{\omega=k\omega_0} \approx t_0 F_D(k\omega_0)$$



Lastnosti DFT

- **Linearnost**

$$\mathcal{F}_D(\{f_1(nt_0)\} + \{f_2(nt_0)\}) = \{F_{1D}(k\omega_0)\} + \{F_{2D}(k\omega_0)\}$$

$$\mathcal{F}_D(\alpha \{f(nt_0)\}) = \alpha \{F_D(k\omega_0)\}$$

- **Periodičnost**

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{Nt_0}$$

$$F_D(k\omega_0 + pN\omega_0) = F_D(k\omega_0) \quad \text{za vsak} \quad k, p \in \mathbb{Z}$$

perioda $N\omega_0$

Lastnosti DFT

- **Inverzna DFT (IDFT)**

$$\text{IDFT :} \quad \{F_D(k\omega_0)\} \longrightarrow \{f(nt_0)\}$$

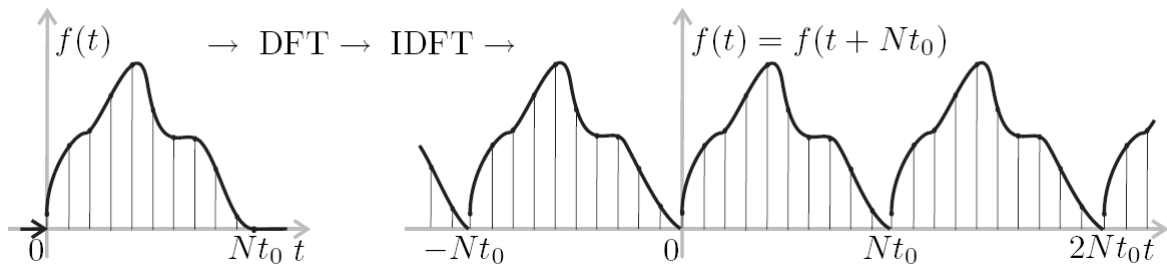
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{Nt_0} \quad f(nt_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_D(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t_0 n}$$

- **Periodičnost IDFT**

$$f(nt_0 + pNt_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_D(k\omega_0) e^{jk\omega_0(t_0 n + pNt_0)} = f(nt_0)$$

perioda Nt_0

Lastnosti DFT



• Zmnožek dveh DFT

$$f_i(t) * f_j(t) \longleftrightarrow F_i(\omega) \cdot F_j(\omega)$$

$$\{F_{D_3}(k\omega_0)\} = \{F_{D_1}(k\omega_0) \cdot F_{D_2}(k\omega_0)\}$$

$$\{f_3(nt_0)\} = \mathcal{F}_D^{-1}(\{F_{D_3}(k\omega_0)\}) = ?$$

Lastnosti DFT

$$\mathcal{F}_D(\{f_1(nt_0)\}) = \{F_{D_1}(k\omega_0)\} \quad \mathcal{F}_D(\{f_2(nt_0)\}) = \{F_{D_2}(k\omega_0)\}$$

$$f_3(nt_0) = \sum_{i=0}^{N-1} f_1((n-i)t_0) f_2(it_0) = \sum_{i=0}^{N-1} f_1(it_0) f_2((n-i)t_0)$$

Periodična konvolucija

Signala $\{f_1(nt_0)\}$ in $\{f_2(nt_0)\}$ je potrebno vzeti kot, da sta periodična s periodo Nt_0 .

$$\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} f_1((n-i)t_0) f_2(it_0) \right\} \longleftrightarrow \{F_{D_1}(k\omega_0) \cdot F_{D_2}(k\omega_0)\}$$

Uporaba DFT pri analizi LSS

Problematika opisa LSS s periodično konvolucijo

$$y(t) = h(t) * u(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega)$$

Vzorčenje signalov s korakom t_0

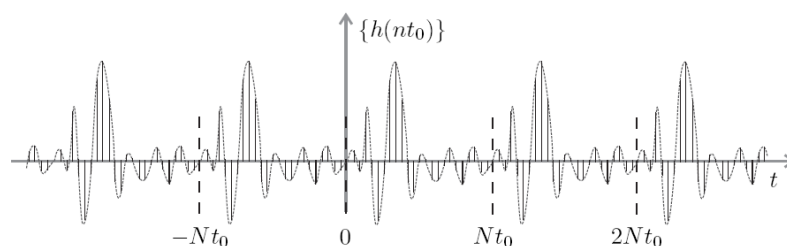
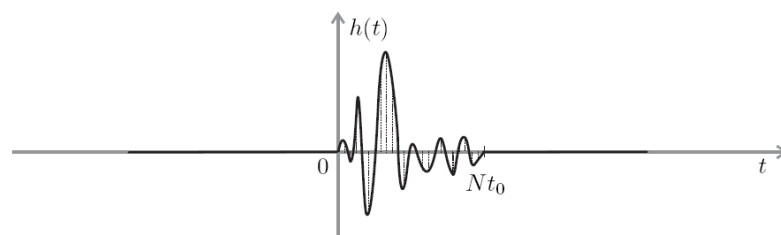
$$y(nt_0) = \sum_{i=0}^n u(it_0)h((n-i)t_0)t_0 \approx y(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau \Big|_{t=nt_0}$$

Uporaba DFT in IDFT

$$y(nt_0) = \sum_{i=0}^{N-1} u(it_0)h((n-i)t_0) \quad ?$$

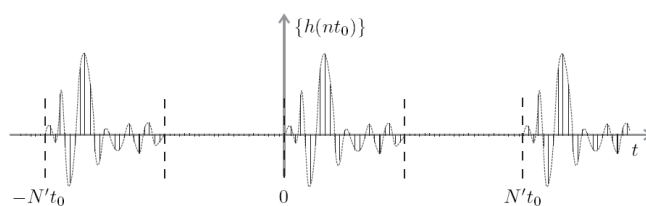
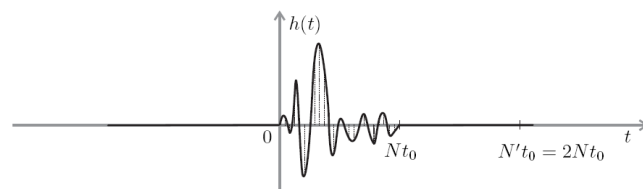
Uporaba DFT pri analizi LSS

Odziv $h(t)$ na enotin impulz



Uporaba DFT pri analizi LSS

Dodajanje ničel ("zero padding") $N' = 2N$

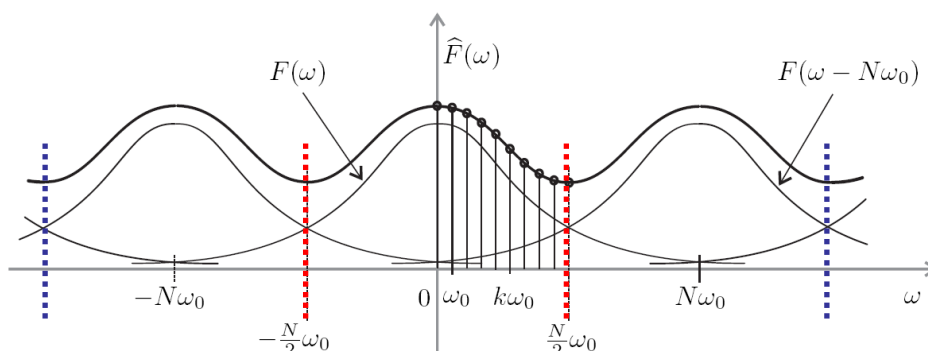


$$0 \leq n < N'$$

$$y(nt_0) = \sum_{i=0}^{N'-1} u(it_0)h((n-i)t_0) = \sum_{i=0}^n u(it_0)h((n-i)t_0)$$

Frekvenčno območje aproksimacije

$$t_0 F_D(k\omega_0) = \hat{F}(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - nN\omega_0) \right]_{\omega=k\omega_0}$$



$$t_0 F_D(k\omega_0) \approx F(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \quad \text{le za} \quad -\frac{N}{2}\omega_0 < \omega < +\frac{N}{2}\omega_0$$

Frekvenčno območje aproksimacije

- Ker je $\frac{N}{2}\omega_0 = \frac{\pi}{t_0}$,
je frekvenčni obseg ocene spektra z DFT obratno sorazmeren z velikostjo t_0 .
- $N\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0}$
Ocena tem boljša, čim manjši bo t_0 .
- Ker za spektre neperiodičnih signalov običajno velja
$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0$$

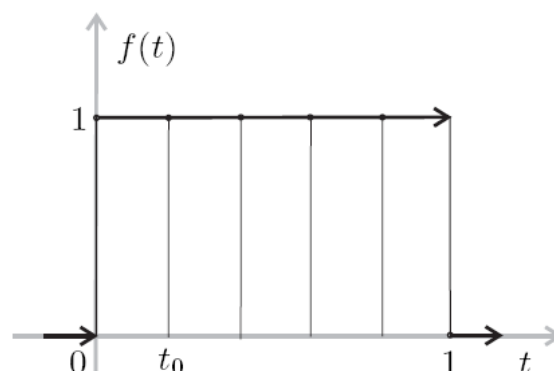
bo največkrat
$$|F(0 - N\omega_0)| \ll |F(\frac{N}{2}\omega_0 - N\omega_0)|$$

in zato ocena spektra z DFT boljša za nižje frekvence.

Zgled

Določimo DFT za signal $f(t)$, ki ga vzorčimo s časovnim razmikom $t_0 = 1/5$ povsod tam, kjer je različen od 0.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$



Zgled

$$\{f(nt_0)\} = \{1, 1, 1, 1, 1\}$$

$$\begin{aligned} N &= 5, \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{Nt_0} = 2\pi \\ \omega_0 t_0 &= \frac{2\pi}{5}. \end{aligned}$$

$$F_D(k\omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0)e^{-jk\omega_0 t_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk\frac{2\pi}{5}n}$$

$$k = 0, 1, \dots, 4 \quad \{F_D(k2\pi)\} = \{5, 0, 0, 0, 0\}$$

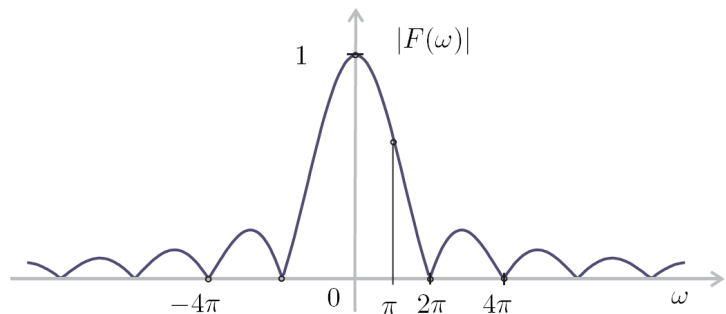
Zgled

$$F(\omega)\big|_{\omega=k2\pi} \approx t_0 F_D(k2\pi), \quad -4\pi \leq \omega \leq 4\pi$$

$$\left\{\frac{1}{5}F_D(k2\pi)\right\} = \{0, 0, 1, 0, 0\}, \quad k2\pi = -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi$$

$$\mathcal{F}\left(f(t + \frac{1}{2})\right) = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\left(f(t + \frac{1}{2})\right) e^{j\omega \frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} e^{j\frac{\omega}{2}}$$

$$|F(\omega)| = \left| \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right|$$



Zgled

Ocenimo z DFT spekter pri $\omega = \pi$.

$$|F(\pi)| = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \doteq 0,637$$

$$\pi = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{Nt_0} \quad k = 1 \quad N = \frac{2}{t_0} = 10$$

$$\{f(nt_0)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$F_D(\omega_1) = F_D(\pi) = \sum_{n=0}^4 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{5}n} = \sum_{n=0}^4 \left(\cos \frac{\pi}{5}n - j \sin \frac{\pi}{5}n \right) \doteq 1 - j 3,078$$

$$t_0|F_D(\omega_1)| = \frac{1}{5}|F_D(\pi)| \doteq 0,647$$

Zgled

Izboljšanje ocene pri $\omega = \pi$

$$t_0 = \frac{1}{10} \quad N = 20$$

$$\{f(nt_0)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$t_0|F_D(\omega_0)| = \frac{1}{10}|F_D(\pi)| = \left| \sum_{n=0}^9 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{10}n} \right| \doteq 0,639$$

$$t_0 = \frac{1}{20}$$

$$t_0|F_D(\omega_0)| = \frac{1}{20}|F_D(\pi)| \doteq 0,637$$