

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

FRANCE MIHELIČ

S I G N A L I

Ljubljana 2014

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

621.391:51(075.8)(0.034.2)

MIHELIČ, France, 1952 -
Signali [Elektronski vir] / Mihelič France ; [izdajatelj] Fakulteta za elektrotehniko.
- 1. izd. - El. knjiga. - Ljubljana : Založba FE, 2014

Način dostopa (URL): <http://luks.fe.uni-lj.si/nluks/wp-content/uploads/2014/11/Signali.pdf>

ISBN 978-961-243-270-6 (pdf)

276843520

Copyright © 2014 Založba FE. All rights reserved.
Razmnoževanje (tudi fotokopiranje) dela v celoti ali po delih
brez predhodnega dovoljenja Založbe FE prepovedano.

URL: <http://luks.fe.uni-lj.si/nluks/wp-content/uploads/2014/11/Signali.pdf>

Založnik: Založba FE, Ljubljana
Izdajatelj: UL Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana
Urednik: prof. dr. Sašo Tomažič

Recenzenta: prof. dr. Nikola Pavešić, prof. dr. Damjan Zazula
1. izdaja

Kazalo

Predgovor	8
1 Uvod	9
1.1 Osnovni pojmi in motivacije	9
1.2 Vrste signalov	10
1.3 Delitve teoretičnih modelov signalov	10
1.3.1 Določljivostni signali	11
1.3.2 Naključni signali	11
1.3.3 Energija in povprečna moč signalov	12
1.3.4 Zvezni in diskretni signali	15
2 Izražanje signalov s temeljnimi funkcijami	18
2.1 Uvodni primer	18
2.2 Vektorski prostor signalov	24
2.3 Izražava signalov z linearno kombinacijo temeljnih funkcij	28
2.3.1 Osnovni izrek	29
2.3.2 Vrednosti srednje kvadratne napake in koeficientov C_i pri optimalni izbiri približka	31
2.3.3 Ortogonalne temeljne funkcije	33
2.3.4 Polnost zaporedja temeljnih funkcij	35
2.3.5 Postopek Gramma in Schmidta	39

2.4	Nekatera polna zaporedja temeljnih funkcij	41
2.4.1	Walsheve temeljne funkcije	41
2.4.2	Haarove temeljne funkcije	43
2.4.3	Ortogonalni polinomi	47
2.4.4	Sinusne temeljne funkcije	49
2.4.5	Sprememba območja ortogonalnosti	50
2.4.6	Razširitev uporabe temeljnih funkcij na neomejene časovne intervale	54
3	Frekvenčna predstavitev periodičnih signalov	56
3.1	Izražava periodičnih signalov s periodičnimi temeljnimi funkcijami - Fourierova vrsta	56
3.1.1	Konvergenca Fourierove vrste	57
3.1.2	Fourierova vrsta realnih periodičnih signalov	59
3.1.3	Kompleksni spekter periodičnih signalov	60
3.1.4	Spektri realnih periodičnih signalov	63
4	Korelacija in konvolucija periodičnih signalov	70
4.1	Korelacija periodičnih signalov	70
4.1.1	Lastnosti korelacije	70
4.1.2	Avtokorelacija	75
4.1.3	Križna korelacija	84
4.2	Konvolucija periodičnih signalov	85
4.2.1	Lastnosti konvolucije periodičnih signalov	85
4.2.2	Periodična funkcija $\delta_{T_0}(t)$	91
5	Frekvenčna predstavitev neperiodičnih signalov	96
5.1	Vpliv postopka daljšanja periode na spekter periodičnega signala	96
5.2	Fourierov integral	98
5.2.1	Fourierova transformacija in inverzna Fourierova transformacija	99

5.2.2	Dirichletovi pogoji	100
5.3	Kompleksni spekter neperiodičnih signalov	101
5.4	Lastnosti Fourierove transformacije	102
5.4.1	Lastnosti spektrov realnih neperiodičnih signalov	102
5.4.2	Linearnost	106
5.4.3	Lastnost podobnosti	107
5.4.4	Premik po časovni osi	108
5.4.5	Premik po frekvenčni osi	111
5.4.6	Amplitudna modulacija	111
5.4.7	Spekter odvoda signala	114
5.4.8	Spekter integrala signala	118
5.4.9	Podobnost med Fourierovo in inverzno Fourierovo transformacijo	119
5.4.10	Posplošena Fourierova transformacija	119
5.5	Funkcija $\delta(t)$	122
5.5.1	Spektralna lastnost funkcije $\delta(t)$	122
5.5.2	Tipalna lastnost funkcije $\delta(t)$	124
5.5.3	Fourierova transformacija konstante	125
5.6	Fourierova transformacija periodičnih signalov	126
5.6.1	Fourierova transformacija periodičnih signalov, ki jih lahko zapišemo s Fourierovo vrsto	127
6	Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov	131
6.1	Korelacija neperiodičnih signalov	131
6.1.1	Lastnosti avtokorelacije	132
6.1.2	Lastnosti križne korelacije	137
6.2	Konvolucija neperiodičnih signalov	146
6.2.1	Lastnosti konvolucije neperiodičnih signalov	146
6.2.2	Predstavitev Fourierovega integrala	152

6.2.3	Časovni izrez signala in njegov spekter	152
7	Naključni signali	158
7.1	Splošni pojmi	158
7.1.1	Privzetek o stacionarnosti	159
7.2	Statistično opisovanje naključnih procesov	163
7.2.1	Vzorčno povprečje	163
7.2.2	Minimizacija srednje kvadratne napake	166
7.2.3	Korelacijska in kovariančna funkcija	168
7.2.4	Stacionarni naključni procesi	170
7.2.5	Vzorčno in časovno povprečje	172
7.3	Poissonov naključni proces	178
8	Uporaba korelacijskih transformacij pri obdelavi signalov	188
8.1	Prevajanje signalov preko linearnih stacionarnih sistemov	188
8.1.1	Zveza med vhodnim in izhodnim signalom v linearnih stacionarnih sistemih	189
8.1.2	Vhodni signal je stacionarni naključni signal	191
8.2	Poissonovi stacionarni naključni signali	193
8.3	Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov	196
8.3.1	Postopek z avtokorelacijo	197
8.3.2	Postopek s križno korelacijo	200
8.3.3	Odkrivanje zvencečih in nezvencečih delov govora ter določanje intonacije	202
9	Digitalni signali	211
9.1	Vzorčenje	211
9.1.1	Izrek o vzorčenju	212
9.1.2	Vzorčenje in rekonstrukcija signala	215
9.1.3	Časovna širina : frekvenčna širina	220

9.2	Kvantizacija	221
9.2.1	Signal kvantizacijske napake $e_Q(t)$	223
9.3	Diskretna Fourierova transformacija	227
9.3.1	Linearnost	229
9.3.2	Diskretna Fourierova transformacija realnih digitalnih signalov	230
9.3.3	Periodičnost diskretne Fourierove transformacije	231
9.3.4	Inverzna diskretna Fourierova transformacija	231
9.3.5	Periodičnost inverzne diskretne Fourierove transformacije	233
9.3.6	Zmnožek diskretnih Fourierovih transformacij	234
9.3.7	Povezava med Fourierovo transformacijo in diskretno Fourierovo transformacijo	237
	Stvarno kazalo	245

Predgovor

Pričujoče delo podaja snov s področja teorije signalov, ki jo predavam že skoraj 15 let v okviru univerzitetnega in visokega strokovnega dodiplomskega študija na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani. Pri obsežnem področju teorije signalov sem se omejil le na tista poglavja in obseg snovi, ki je tudi izpredavan. Nekatere smernice za razširitev znanja so podane s krajšimi seznamami literature na koncu vsakega poglavja. V delu se velikokrat sklicujem na nekatera osnovna spoznanja s področja matematične analize in verjetnostnega računa. Pri tem se sklicujem na snov, podano v učbenikih Matematika I - IV, ki so izšli pri založbi FE in FRI. Za nekatere navedke, ki jih v teh učbenikih ni, pa citiram posamezna poglavja iz del Višja matematika II in III, ki ju je izdal Ivan Vidav. Za pripravo na pisni del izpita bo bralcem v pomoč tudi delo "*Signali – Priročnik z zbirko rešenih nalog*", ki je pri Založbi FE in FRI dočakalo že tretji ponatis.

Učbenikov, ki jih je za področje teorije signalov napisal pokojni prof. akad. Ludvik Gyergyek, že nekaj časa ni več v prodaji. Novi učbenik se v marsičem naslanja na ta dela. Morda je opazna razlika le v obsegu, ki je prilagojen enosemestrskemu kurzu, v opisih nekaterih praktičnih zgledov, ki ponazarjajo določena teoretična spoznanja, in v nekaterih delih spremenjenem načinu podajanja snovi in komentarjih.

Delo je na podlagi zapiskov za predavanja, objavljenih prispevkov ter dosegljive domače in tuje literature šele pravkar nastalo. Kljub večkratnemu pregledovanju vsebine so v njem gotovo še napake, za katere se bralcu že vnaprej opravičujem. Vsako opozorilo oziroma namig za spremembo tega dela bom z veseljem upošteval in se potrudil, da bo v naslednjih izdajah nepravilnosti čim manj.

Na tem mestu bi se rad posebej zahvalil vsem sodelavcem v Laboratoriju za umetno zaznavanje, sisteme in kibernetiko na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani, s katerimi tvorno sodelujem in so v marsičem pripomogli k nastanku učbenika. Še posebej se zahvaljujem asistentoma dr. Meliti Hajdinjak in dr. Janezu Žibertu, ki sta delo pazljivo prebrala in podala nekatere tehtne pripombe. Zahvaljujem se tudi obema recenzentoma za vesten pregled in napotke za spremembe.

Učbenik v tiskani izdaji je v zadnjem letu že pošel in pred vami je druga popravljena in dopolnjena izdaja, ki je na voljo v elektronski obliki.

december, 2014

France Mihelič

1. Uvod

1.1 Osnovni pojmi in motivacije

S signali pojmujeemo nosilce sporočil oziroma informacij – *znake*¹, ki jih tako živi kot umetni sistemi uporabljajo za medsebojno sporazumevanje. Tako na primer ljudje za sporazumevanje uporabljamo govor, kretnje in različna druga znamenja. Signali se po svoji fizikalni naravi razlikujejo. Privzemimo naslednjo definicijo.

- *Signal* je fizikalna tvorba, s katero je moč prenašati sporočila vzdolž določenega okolja. S pojmom *šum* opredelimo le posebno vrsto signala, ki pri določeni uporabi predstavlja motilni pojav.

S prenašanjem sporočil sta tesno povezana tudi sistema *oddajnik*, ki sporočila oddaja, in *sprejemnik*, ki sporočila sprejema. Pri ljudeh tako lahko na primer pojem sprejemnika poistovetimo s sluhom in vidom, pojem oddajnika pa z govorili².

Za razvoj teoretične obravnave signalov so pomembne iznajdbe sistemov za komunikacijo (telegraf, telefon, radio, televizija, ...), ki so se pojavili v sredini 19. in začetku 20. stoletja, ter digitalnih računalnikov v drugi polovici 20. stoletja. Delovanje teh sistemov je vezano na električne signale. Z ustreznimi napravami je bilo električne signale možno opazovati, meriti in zapisovati, kar je omogočilo tudi njihovo matematično modeliranje in obdelavo. Pričelo se je razvijati pomembno elektrotehniško in tudi širše teoretično področje, ki ga imenujemo teorija signalov.

- *Teorija signalov* predstavlja študij sprememb signalov kot nosilcev sporočil in informacij od svojih izvorov preko sistemov za oddajanje in sprejemanje. Osnovna naloga teorije signalov je matematično opisovanje signalov, njihova analiza in obdelava.

O aktualnosti področja pričajo vedno nove monografije in učbeniki, številne mednarodne revije ter vsakoletne znanstvene in strokovne konference, ki so v celoti ali delno posvečene teoriji in obdelavi signalov. Veliko teh del, kot so na primer učbeniki [1, 2, 3, 4] in revije [5, 6, 7, 8], je na razpolago tudi v knjižnici Fakultete za elektrotehniko, Univerze v Ljubljani.

¹Beseda *signal* izvira iz latinske besede *signum*, kar pomeni znak.

²Človeški organi, ki sodelujejo pri tvorjenju govora.

1.2 Vrste signalov

Pri obravnavi signalov ločimo med dejanskimi fizikalnimi signali in njihovimi teoretičnimi modeli.

- *Fizikalno realni signali* so signali, ki nas obdajajo v prostoru in času in jih lahko zaznamo z ustreznimi tipali (senzorji).

To so na primer: zvočni signali, vidni signali, elektromagnetni signali itd. V svetu, v katerem živimo, zanje veljajo nekatere pomembne omejitve oziroma lastnosti:

- omejena energija,
- omejena amplituda,
- amplituda je zvezna funkcija časa,
- omejen spekter.

- *Teoretični modeli signala* so predstavljeni kot realna ali kompleksna funkcija ene realne spremenljivke (največkrat časa).

Modele je smiselno zasnovati poenostavljeno in preprosto. Nima jo nujno omejitev, ki jih nalaga fizikalna stvarnost. Na primer:

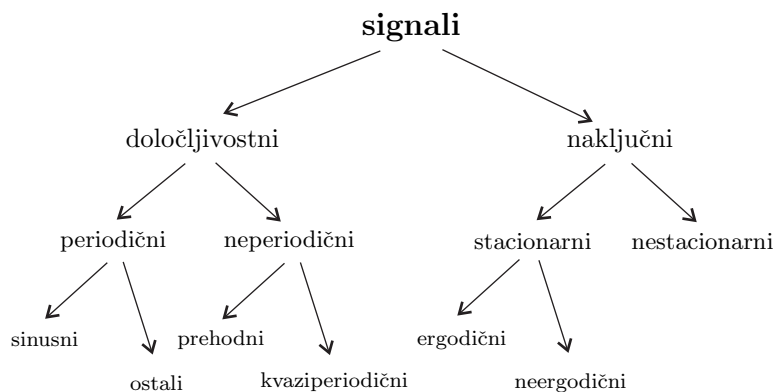
- signali z neomejeno energijo, močjo, amplitudo,
 - nezvezni signali,
 - signali, definirani na celi časovni osi,
 -
-

1.3 Delitve teoretičnih modelov signalov

Matematični modeli signalov so lahko zelo različni. Zaradi tega je smiselno ločeno obravnavati skupine signalov z izbranimi skupnimi lastnostmi. Naštejmo nekatere osnovne delitve (slika 1.1), ki jih bomo uporabljali v nadaljnji obravnavi.

Signale ločimo na določljivostne in naključne.

- *Določljivostni* ali deterministični so signali, pri katerih je odvisnost amplitude od časa enolično določena. V tem primeru signal lahko istovetimo s pojmom funkcija, kot je definiran v matematični analizi [9].
- *Naključni* so signali, katerih obnašanje v odvisnosti od časa je nepredvidljivo. Zato vrednosti takega signala vnaprej ne moremo določiti. Vrednost signala ob času t predstavimo kot naključno spremenljivko [10].



Slika 1.1: Delitev signalov

1.3.1 Določljivostni signali

Določljivostne signale delimo na periodične in neperiodične.

- Signal $f(t)$ je *periodičen* natanko takrat, ko je za vsako vrednost časa t izpolnjen pogoj

$$f(t + T) = f(t), \quad (1.1)$$

kjer je T različen od 0 ($T \neq 0$).

Konstanta T je *perioda* signala $f(t)$.

Če je signal periodičen, ima neskončno različnih period. Najmanjšo pozitivno periodo signala $f(t)$ imenujemo osnovna perioda. Vse ostale periode so celi mnogokratniki osnovne periode.

- Signal je *neperiodičen*, če ni periodičen.

1.3.2 Naključni signali

Naključni signali so neperiodični, saj bi izpolnjeni pogoj periodičnosti pomenil, da so vse vrednosti signala z njegovim potekom na končnem časovnem intervalu ene periode natanko določene. Analiza in obdelava teh signalov se poenostavi, če predpostavimo, da se vir oziroma sistem, ki naključni signal oddaja, obnaša stacionarno. Stacionarnost naključnega vira bomo natančneje opredelili v poglavju 7. Zaenkrat lastnost stacionarnosti sistema vezimo na zahtevo, da je verjetnostna porazdelitev možnih vrednosti amplitud signala, ki ga sistem oddaja, neodvisna od časa.

- Naključne signale, ki jih oddaja stacionarni naključni vir, imenujemo *stacionarni naključni signali*.

Predpostavke, da imamo v določenem primeru obdelave signalov opravka s stacionarnimi signali, velikokrat v celoti ne moremo potrditi. V takih primerih je včasih mogoče predpostavko o stacionarnosti omejiti na neko krajše časovno obdobje.

1.3.3 Energija in povprečna moč signalov

1.3.3.1 Trenutna moč signala

Naj $v(t)$ pomeni napetost in $i(t)$ tok v vezju ob časovnem trenutku t . Trenutno moč $p(t)$ v tem primeru določimo kot

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = 1/R \cdot v^2(t).$$

V primeru, ko bi bila upornost

$$R = 1,$$

bi za trenutno moč dobili kar

$$p(t) = i^2(t) = v^2(t).$$

Velikost faktorja R je odvisna od izbire enot. Ker se v okviru naših izvajanj z enotami in konkretno fizikalno naravo signalov ne bomo posebej ukvarjali, trenutno moč p_f signala $f(t)$ definiramo kar kot $f^2(t)$ oziroma splošneje, tako da je zapis veljaven tudi za kompleksne signale $f(t)$,

$$p_f(t) = |f(t)|^2. \quad (1.2)$$

1.3.3.2 Energija in povprečna moč signala na končnem časovnem intervalu

Skladno z (1.2) definiramo energijo signala $f(t)$ na končnem časovnem intervalu kot

$$E_f(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt. \quad (1.3)$$

Za povprečno moč signala $f(t)$ na časovnem intervalu (t_1, t_2) pa dobimo

$$P_f(t_1, t_2) = \frac{E_f(t_1, t_2)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt. \quad (1.4)$$

1.3.3.3 Energija in povprečna moč signala preko cele časovni osi

S širitvijo integracijskega intervala v izrazih (1.3) in (1.4) proti neskončnosti definicijo energije in povprečne moči signala $f(t)$ posplošimo na celo časovno os. Pri tem seveda lahko pride do tega, da postopek ni konvergenten.

- Energija E_f signala $f(t)$ je tako določena z izrazom

$$E_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt . \quad (1.5)$$

Signal $f(t)$ je energijski, če limita (1.5) obstaja in je končna:

$$E_f < \infty .$$

- Povprečna moč signala $f(t)$ je podana s

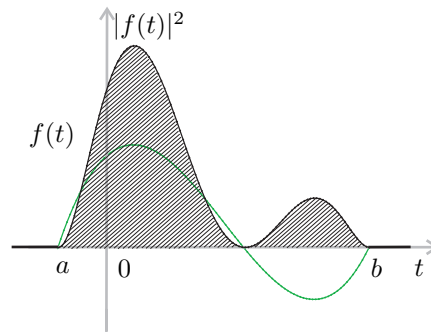
$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt . \quad (1.6)$$

Signal $f(t)$ je močnosten, če limita (1.6) obstaja ter je njegova moč P_f končna in pozitivna:

$$0 < P_f < \infty .$$

Posledice:

- Časovno omejeni signali z omejeno amplitudo so energijski (slika 1.2).



Slika 1.2: Po času in amplitudi omejena signala $f(t)$ in $|f(t)|^2$

- Potrební pogoj za to, da je signal energijski, je lastnost

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0 . \quad (1.7)$$

Če lastnost (1.7) ni izpolnjena, integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

zagotovo ni končen, saj gre za integral nenegativne funkcije [11].

- Povprečna moč signalov, ki so energijski, je enaka 0.

Ker je E_f končna, je

$$P_f = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_f}{2T} = E_f \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} = 0 .$$

- Periodični signali niso energijski.

Za periodične signale očitno ni izpolnjena lastnost (1.7), saj zanje limita

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$$

ne obstaja. Periodični signali so običajno močnostni.

- Stacionarni naključni signali niso energijski.

Za stacionarne naključne signale ni izpolnjena lastnost (1.7). Če bi bila lastnost (1.7) izpolnjena, bi veljalo, da je verjetnost

$$\mathbf{P}(f(\pm\infty) = 0) = 1 .$$

Zaradi predpostavljene stacionarnosti signalov $f(t)$ je potem zgornja enačba izpolnjena za vsak t :

$$\mathbf{P}(f(t) = 0) = 1 .$$

Temu pogoju pa ustreza le signal, ki je povsod enak nič:

$$f(t) = 0 .$$

Tudi stacionarni naključni signali so običajno močnostni.

- Povprečno moč periodičnih signalov lahko določimo tudi iz

$$P_f = \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt , \quad (1.8)$$

kjer je trenutek t_1 poljuben in T_i katerakoli pozitivna perioda signala $f(t)$.

Če je T_i perioda signala $f(t)$, je perioda tudi poljubni celi mnogokratnik periode nT_i . Vrednost izraza (1.8) se ne spremeni, če namesto T_i vzamemo na primer vrednost $2T_i$:

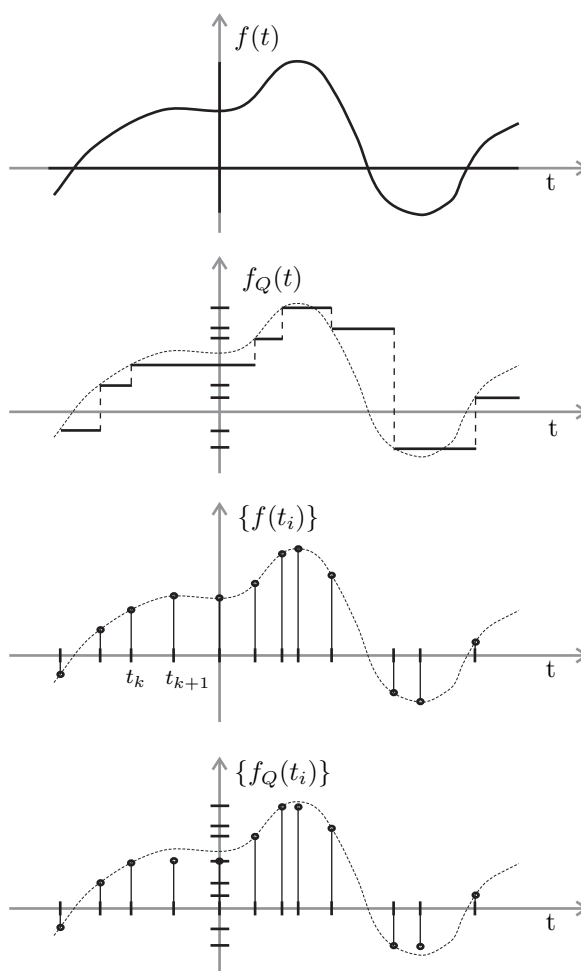
$$\begin{aligned} \frac{1}{2T_i} \int_{t_1}^{t_1+2T_i} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt + \frac{1}{T_i} \int_{t_1+T_i}^{t_1+2T_i} |f(t)|^2 dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt \right\} = \frac{1}{T_i} \int_{t_1}^{t_1+T_i} |f(t)|^2 dt . \end{aligned}$$

Zgornjo izpeljavo lahko po matematični indukciji posplošimo na poljuben cel mnogokratnik $n2T_i$. Od tu dalje pa, če za spodnjo mejo integrala izberemo $t_1 = -nT_i$, dobimo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2nT_i} \int_{t_1}^{t_1+2nT_i} |f(t)|^2 dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2nT_i} \int_{-nT_i}^{nT_i} |f(t)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = P_f . \end{aligned}$$

1.3.4 Zvezni in diskretni signali

Pri obdelavi signalov na digitalnih računalnikih je pomembno, da signale med seboj razlikujemo po tem, kako sta podani njihovo definicijsko območje in zaloga vrednosti.



Slika 1.3: Signal $f(t)$ in prirejeni kvantizirani signal $f_Q(t)$, vzorčeni signal $\{f(t_i)\}$ in digitalni signal $\{f_Q(t_i)\}$

V primeru, ko želimo amplitude signala predstaviti s številskimi vrednostmi v digitalnem računalniku, smo zaradi omejenega obsega pomnilnika prisiljeni za amplitude izbirati le med končnim številom različnih vrednosti. Vrednosti seveda določimo tako, da pri tem napravimo čim manjšo napako. Ustrezen postopek imenujemo *kvantizacija* in prirejeni signal $f_Q(t)$ kvantiziran signal.

Iz istega razloga lahko v pomnilniku predstavimo vrednosti signala le ob končnem številu časovnih trenutkov $\{t_i\}$. Govorimo o postopku *vzorčenja* in vzorčenem signalu $\{f(t_i)\}$.

Za običajne matematične modele signalov $f(t)$ je njihovo definicijsko območje zvezno. To je končen ali neomejen časovni interval. Prav tako to največkrat velja za zalogo vrednosti (možne amplitude) signala (slika 1.3). Signal je zvezna funkcija časa v primeru, ko sta leva in desna limita amplitude signala enaki za vsak čas t z definicijskega območja [12]. Lastnost zveznosti amplitud signala že privzema, da sta definicijsko območje in zaloga vrednosti signala zvezni področji.

Za kvantificirane signale njihova zaloga vrednosti ni več zvezna, ampak števna³ oziroma *diskretna* množica realnih ali kompleksnih števil (slika 1.3). Prav tako velja, da je definicijsko območje vzorčenih signalov diskretna množica časovnih trenutkov (slika 1.3).

Pri obdelavi signalov na digitalnih sistemih je potrebno izvesti kvantizacijo in vzorčenje.

- Vzorcene in kvantificirane signale imenujemo *digitalne signale*.

To so signali z diskretnim (nezveznim) definicijskim območjem in diskretno zalogo vrednosti (slika 1.3). Podrobneje bomo o digitalnih signalih govorili v poglavju 9.

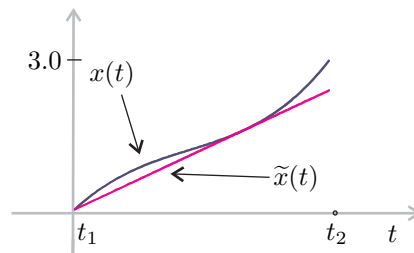
³V praksi je zaloga vrednosti za kvantificirane signale končna množica.

Literatura

- [1] S. S. Haykin, B. Van Veen: *Signals and Systems*, Wiley, 2003.
- [2] C. L. Phillips, J. M. Parr, E. A. Riskin: *Signals, Systems and Transforms*, Prantice Hall, 2003.
- [3] R. M. Gray, L. D. Davisson: *An Introduction to Statistical Signal Processing*, Cambridge University Press, 2004.
- [4] E. C. Ifeachor, B. W. Jervis: *Digital Signal Processing - A practical Approach*, Prentice Hall, 2002.
- [5] *IEEE Transactions on Signal Processing*, New York: Institute of Electrical nad Electronics Engineers, ISSN 1053-587X.
- [6] *IEEE Signal Processing Magazine*, New York: Institute of Electrical nad Electronics Engineers, ISSN 1053-5888.
- [7] *Signal Processing*, Amsterdam: North-Holland, ISSN 0165-1684.
- [8] *Digital Signal Processing*, Duluth: Academic Press, ISSN 1051-2004.
- [9] G. Tomšič, B. Orel, N. Mramor Kosta: 3.1 Osnovni pojmi, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2004, str. 63–73.
- [10] G. Tomšič, T. Slivnik: 5.2 Slučajne spremenljivke, *Matematika IV*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2004, str. 149–151.
- [11] G. Tomšič, B. Orel, N. Mramor Kosta: 5.6 Nepravi (posplošeni) integrali, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2004, str. 184–189.
- [12] G. Tomšič, B. Orel, N. Mramor Kosta: 3.2 Zvezne funkcije, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2004, str. 73–90.

2. Izražanje signalov s temeljnimi funkcijami

2.1 Uvodni primer



Slika 2.1: Signal $x(t)$ in njegov približek $\tilde{x}(t)$

Naj bo $x(t)$ poljuben signal s končno energijo na omejenem časovnem intervalu (t_1, t_2) . Določimo približek $\tilde{x}(t)$ signala $x(t)$ (slika 2.1):

$$\tilde{x}(t) \approx x(t), \quad t_1 < t < t_2.$$

Pri tem približek $\tilde{x}(t)$ izrazimo z

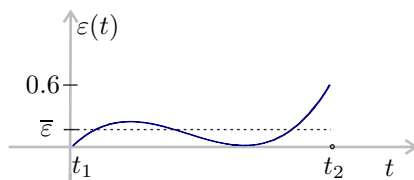
$$\tilde{x}(t) = C \phi(t), \quad t_1 < t < t_2, \quad (2.1)$$

kjer je $\phi(t)$ neka vnaprej določena funkcija, C pa poljubna konstanta.

Vprašajmo se, kako bi določili vrednost konstante C , da bi dobili čim boljši približek?

Zgornja naloga je preprost optimizacijski problem. Za njegovo reševanje je potrebno najprej določiti kriterij, po katerem bomo presodili kvaliteto približka – *kriterijsko funkcijo*. Ker med sabo primerjamo signale, je naravno, da za presojo kvalitete približka opazujemo razliko med signalom in njegovim približkom:

$$\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t), \quad t_1 < t < t_2. \quad (2.2)$$



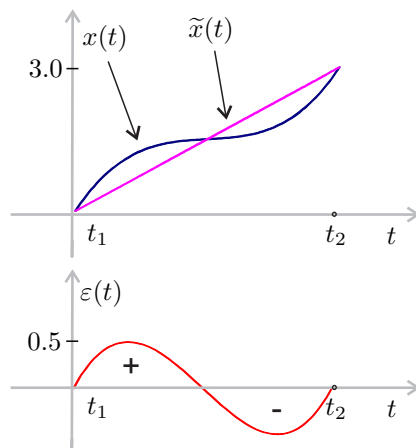
Slika 2.2: Signal napake $\varepsilon(t)$ in njegova povprečna vrednost $\bar{\varepsilon}$

Signal $\varepsilon(t)$ imenujemo signal napake (slika 2.2). Čim manjše bodo amplitude $\varepsilon(t)$, tem boljši bo približek. V oceno za kvaliteto približka pa je smiselno vključiti vsa odstopanja $\varepsilon(t)$ na (t_1, t_2) .

Kriterij

$$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t) dt$$

povprečne vrednosti signala $\varepsilon(t)$ bo dal sicer majhno povprečno vrednost pri majhnih odstopanjih, prav tako pa se lahko zgodi (slika 2.3), da se poljubno velika pozitivna in negativna odstopanja odštejejo, kar ima ravno tako za posledico majhno vrednost $\bar{\varepsilon}(t)$. Temu učinku se izognemo, če za kriterij kvalitete izberemo



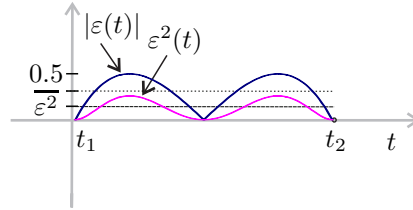
Slika 2.3: Signal $x(t)$ in njegov približek $\tilde{x}(t)$

$$|\bar{\varepsilon}(t)| = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)| dt$$

ali pa

$$\bar{\varepsilon}^2(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt. \quad (2.3)$$

Glej sliko 2.4.



Slika 2.4: Signala $|\varepsilon(t)|$ in $\varepsilon^2(t)$ ter vrednost srednje kvadratne napake $\overline{\varepsilon^2}$

- Kriterijsko funkcijo $\overline{\varepsilon^2(t)}$, določeno z (2.3), imenujemo *povprečna oziroma srednja kvadratna napaka*.

Ta kriterij ima pred drugimi kriterijskimi funkcijami prednost tudi v svoji jasni fizikalni interpretaciji. Izraz (2.3) namreč določa povprečno oziroma srednjo moč signala napake $\varepsilon(t)$, kot smo to definirali z (1.4) v prejšnjem poglavju. Če bomo določili parametre približka tako, da bomo dosegli najmanjšo vrednost $\overline{\varepsilon^2(t)}$, bomo s tem minimizirali povprečno moč signala napake $\varepsilon(t)$.

Naj bo $\overline{\varepsilon^2(t)}$ kriterij, po katerem bomo vrednotili kvaliteto približka $\tilde{x}(t)$. Ker je po (2.1)

$$\tilde{x}(t) = C \phi(t),$$

moramo poiskati optimalno vrednost koeficienta C . Izrazimo vrednost srednje kvadratne napake, tako da se omejimo na realne $x(t)$ in $\phi(t)$.

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(t)} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - \tilde{x}(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (x(t) - C \phi(t))^2 dt = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - 2C \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt + C^2 \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\overline{\varepsilon^2(t)}$ je polinomska funkcija parametra C in zato tudi odvedljiva. Kot vemo, je potreben pogoj za nastop ekstremne vrednosti odvedljive funkcije ničelni odvod:

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(t)}}{\partial C} = 0.$$

Določimo $\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(t)}}{\partial C}$!

Iz (2.4) dobimo

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2(t)}}{\partial C} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ -2 \int_{t_1}^{t_2} x(t) \phi(t) dt + 2C \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \right\}.$$

Rešimo še enačbo

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\overset{\dots\dots\dots}{\partial \varepsilon^2(t)}}{\partial C} \\
 0 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ -2 \int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi(t) dt + 2C \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \right\} \\
 0 &= - \int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi(t) dt + C \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \\
 C &= \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt} . \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Za smiselno izbiro funkcije $\phi(t)$ je rešitev (2.5) končna.

Ali bi bil potencialni ekstrem pri vrednosti parametra C , ki jo dobimo z rešitvijo enačbe (2.5), lahko tudi maksimum? Odgovor je ne, ker maksimalna vrednost srednje kvadratne napake ni navzgor omejena. Z dovolj veliko absolutno vrednostjo koeficienta C lahko dosežemo poljubno veliko napako¹.

Iz izpeljave (2.5) tudi vidimo, da faktor

$$\frac{1}{t_2 - t_1}$$

ne vpliva na določitev optimalne vrednosti koeficienta C . To pomeni, da bi za kriterij, kjer bi namesto povprečne moči signala napake upoštevali kar energijo signala $\varepsilon(t)$ na časovnem intervalu (t_1, t_2)

$$\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon^2(t) dt ,$$

dobili enako rešitev.

Označimo s

$$K = \int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt \tag{2.6}$$

in določimo vrednost srednje kvadratne napake $\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon^2(t)}$ pri optimalni izbiri koeficienta C .

Iz (2.4), (2.5) in (2.6) dobimo

$$\begin{aligned}
 \overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon^2(t)} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - 2CCK + C^2K \right\} \\
 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt - C^2K \right\} . \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

¹Za določitev "slabega" približka se ni treba posebej truditi, težave nastopijo pri iskanju dovolj kvalitetnega.

Primer 2.1

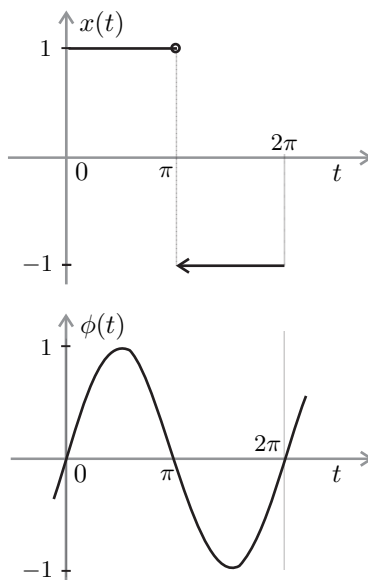
Za signal $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq \pi \\ -1, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

na časovnem intervalu $0 < t < 2\pi$ določimo približek

$$\tilde{x}(t) = C \sin t.$$

Vrednost koeficienta C določimo tako, da bo vrednost srednje kvadratne napake najmanjša. Določimo tudi velikost srednje kvadratne napake $\varepsilon^2(t)$ in narišimo potek približka $\tilde{x}(t)$.



Slika 2.5: Signal $x(t)$ in funkcija $\phi(t) = \sin t$ na intervalu $(0, 2\pi)$

Rešitev

Potek signalov $x(t)$ in $\phi(t) = \sin t$ je podan na sliki 2.5. Optimalno vrednost koeficienta C določimo po enačbi (2.5):

$$C = \frac{\int_0^{2\pi} x(t) \sin t \, dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt}.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \left. \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right|_0^{2\pi} = \pi,$$

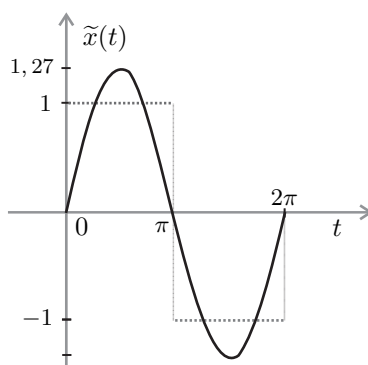
$$\int_0^{2\pi} x(t) \sin t \, dt = \int_0^{\pi} \sin t \, dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin t \, dt = -\cos t \Big|_0^{\pi} + \cos t \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4,$$

$$C = \frac{4}{\pi} \doteq 1,273 .$$

Za naš primer je optimalen približek

$$\tilde{x}(t) = \frac{4}{\pi} \sin t .$$

Glej sliko 2.6.



Slika 2.6: Približek $\tilde{x}(t)$ signala $x(t)$ na intervalu $(0, 2\pi)$

Določimo še vrednost srednje kvadratne napake (2.7):

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} 1 dt - \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 \pi \right\} = \dots = 1 - \frac{8}{\pi^2} \doteq 0,189 .$$

Komentar

Ali je napaka “velika”?

Velikost napake, ki predstavlja povprečno moč signala napake $\varepsilon(t)$ na intervalu, kjer določamo približek, je smiselno primerjati s povprečno močjo P_x signala $x(t)$, za katerega določamo približek $\tilde{x}(t)$.

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1 .$$

Srednja kvadratna napaka $\overline{\varepsilon^2(t)}$ torej predstavlja približno 19% povprečne moči signala $x(t)$.

Ali je približek “ustrezen”?

“Ustreznost” približka določa namen uporabe. Velikokrat lahko za določeno uporabo ustreznost približka ovrednotimo z velikostjo ali relativno velikostjo srednje kvadratne napake in določen približek $\tilde{x}(t)$ signala $x(t)$ sprejmemo kot zadovoljiv, če je pripadajoča vrednost srednje kvadratne napake $\overline{\varepsilon^2(t)}$ manjša od neke kritične vrednosti α :

$$\overline{\varepsilon^2(t)} < \alpha .$$

V zvezi s tem se tudi pokaže največja pomanjkljivost v tem razdelku predstavljenega postopka določanja približkov. Če po predlaganem postopku s funkcijo $\phi(t)$ ne dosežemo dovolj majhne vrednosti $\varepsilon^2(t)$, nam ne preostane drugega, kot da poizkusimo določiti boljši približek z neko drugo funkcijo $\phi_i(t)$. Pri slepem izbiranju kandidatov funkcij $\phi_i(t)$ za določanje približka nimamo nobenega zagotovila, da bomo v končnem številu poizkusov dosegli dovolj majhno vrednost srednje kvadratne napake.

Za določanje približka, ki temelji na kriteriju najmanjše srednje kvadratne napake, potrebujemo postopek izbire, ki nas bo v končnem številu korakov pripeljal do ustrezne rešitve.

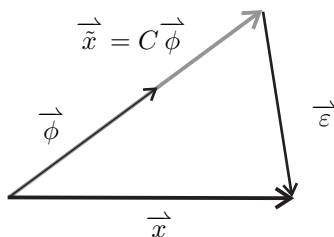
2.2 Vektorski prostor signalov

Razmišljanje iz uvodnega razdelka 2.1 predstavimo še na drugačen način. V dvorazsežnem evklidskem vektorskem prostoru imejmo dva nekolinearna neničelna vektorja \vec{x} in $\vec{\phi}$ (slika 2.7). Priredimo vektorju $\vec{\phi}$ še kolinearni vektor

$$\vec{\tilde{x}} = C \vec{\phi} .$$

Vektor $\vec{\varepsilon}$ pa naj bo določen z razliko

$$\vec{\varepsilon} = \vec{x} - \vec{\tilde{x}} . \quad (2.8)$$



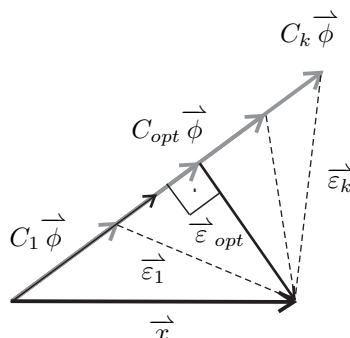
Slika 2.7: Vektorji \vec{x} , $\vec{\phi}$, $\vec{\tilde{x}}$ in $\vec{\varepsilon}$ v dvorazsežnem evklidskem vektorskem prostoru

Vprašajmo se, za katero vrednost skalarja C bo vektor $\vec{\varepsilon}$ najkrajši?

Iz predstavitve v Evklidskem vektorskem prostoru sledi, da se bo to zgodilo takrat, ko bosta vektorja $C\vec{\phi}$ in $\vec{\varepsilon}$ pravokotna (slika 2.8).

V vektorskem prostoru, v katerem je definiran skalarni produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sta dva neničelna vektorja pravokotna oziroma *ortogonalna* natanko takrat, ko je njun skalarni produkt enak 0:

$$\langle \vec{\varepsilon}, C\vec{\phi} \rangle = 0 . \quad (2.9)$$



Slika 2.8: Vektorji $\vec{\varepsilon}$ pri različnih vrednostih skalarja C_l . Pri vrednosti C_{opt} sta vektorja $C_{opt}\vec{\phi}$ in $\vec{\varepsilon}_{opt}$ pravokotna.

Če upoštevamo (2.8) in lastnosti skalarnega produkta, iz (2.9) dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{\varepsilon}, C\vec{\phi} \rangle = \langle \vec{x} - C\vec{\phi}, C\vec{\phi} \rangle = \langle \vec{x}, C\vec{\phi} \rangle - \langle C\vec{\phi}, C\vec{\phi} \rangle \\ 0 &= C\langle \vec{x}, \vec{\phi} \rangle - C^2\langle \vec{\phi}, \vec{\phi} \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

Enačba (2.10) je kvadratna enačba za skalar C . Rešitev

$$C = 0$$

za nas ni zanimiva. Neničelna rešitev te enačbe pa je

$$C = \frac{\langle \vec{x}, \vec{\phi} \rangle}{\langle \vec{\phi}, \vec{\phi} \rangle}. \quad (2.11)$$

V razdelku 2.1 smo za optimalno izbiro koeficienta pri določanju približka $\tilde{x}(t)$ signalu $x(t)$ glede na kriterij minimalne srednje kvadratne napake dobili enačbo (2.5)

$$C = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi^2(t) dt}.$$

Že na prvi pogled sta si zgornja izraza podobna in smiselno se je vprašati, ali ni morda za podobnostjo zapisov obeh enačb skrito tudi kakšno globlje ozadje?

- Množica $L_{(t_1, t_2)}^2$ vseh energijskih signalov s končnega časovnega intervala (t_1, t_2) tvori vektorski prostor!

Množica je vektorski prostor [1], če je mogoče v njej definirati:

- vsoto med elementi množice in
- množenje elementov množice s skalarjem.

Pri tem mora biti operacija seštevanja komutativna in asociativna, obstajati mora ničelni in nasprotni element prostora, množenje s skalarjem pa mora biti distributivno.

- Vektorje imenujemo elemente vektorskega prostora.

Za energijske signale je to kar običajna vsota dveh funkcij in množenje funkcije s konstanto, saj je vsota dveh energijskih signalov zopet energijski signal in produkt konstante s signalom prav tako energijski signal:

$$\begin{aligned} x(t), y(t) \in L^2_{(t_1, t_2)} &\implies x(t) + y(t) \in L^2_{(t_1, t_2)}, \\ x(t) \in L^2_{(t_1, t_2)} \ \&\ \alpha \in \mathbb{C} &\implies \alpha x(t) \in L^2_{(t_1, t_2)}. \end{aligned}$$

- V vektorskem prostoru $L^2_{(t_1, t_2)}$ lahko definiramo skalarni produkt

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{y(t)} dt. \quad (2.12)$$

Enostavno lahko preverimo, da z (2.12) definirana relacija, ki dvema signaloma priredi skalar

$$\langle x(t), y(t) \rangle \in \mathbb{C},$$

izpolnjuje za skalarni produkt zahtevane lastnosti:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \overline{\langle y(t), x(t) \rangle}, \quad (2.13)$$

$$\langle \alpha x(t), y(t) \rangle = \alpha \langle x(t), y(t) \rangle, \quad (2.14)$$

$$\langle x_1(t) + x_2(t), y(t) \rangle = \langle x_1(t), y(t) \rangle + \langle x_2(t), y(t) \rangle, \quad (2.15)$$

$$\langle x(t), x(t) \rangle = 0 \iff x(t) = 0. \quad (2.16)$$

Pri zadnji lastnosti (2.16) je potrebno dodati, da relacija

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = 0$$

dejansko pomeni, da je energija signala $x(t)$ enaka 0. Signal $x(t)$, ki izpolnjuje to lastnost, bi sicer lahko bil ob končnem številu časovnih trenutkov različen od 0, povsod drugod pa mora biti enak 0. S signali, ki imajo ničelno energijo, ni mogoče prenašati informacije [2]. To pomeni, da so za praktično uporabo nezanimivi in jih lahko enačimo z ničelnim signalom.

Skalarni produkt realnih signalov po (2.12) zapišemo kot

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

in zato tudi izraz (2.5) predstavimo kot kvocient skalarnih produktov:

$$C = \frac{\langle x(t), \phi(t) \rangle}{\langle \phi(t), \phi(t) \rangle}.$$

Množica $L^2_{(t_1, t_2)}$ je torej vektorski prostor, v katerem je definiran skalarni produkt. V vsakem vektorskem prostoru s skalarnim produktom je mogoče definirati normo vektorja:

$$\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle. \quad (2.17)$$

Zato je $L^2_{(t_1, t_2)}$ normiran prostor. Če je v vektorskem prostoru definirana norma, pa iz nje lahko vedno določimo tudi razdaljo oziroma *metriko* med vektorji

$$d(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|$$

oziroma

$$d^2(x(t), y(t)) = \langle x(t) - y(t), x(t) - y(t) \rangle. \quad (2.18)$$

Torej gre tudi za metrični vektorski prostor².

Razvijmo izraz (2.18) še naprej:

$$\begin{aligned} d^2(x(t), y(t)) &= \langle x(t), x(t) \rangle + \langle y(t), y(t) \rangle - \langle x(t), y(t) \rangle - \overline{\langle x(t), y(t) \rangle} \\ &= \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 - \langle x(t), y(t) \rangle - \overline{\langle x(t), y(t) \rangle} \\ &= \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 - 2\mathcal{R}e(\langle x(t), y(t) \rangle). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Naj bo

$$\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t).$$

Iz zvez (2.17), (2.18) in (2.19) sledi

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = d^2(x(t), \tilde{x}(t)) \quad (2.20)$$

$$= \|x(t)\|^2 + \|\tilde{x}(t)\|^2 - 2\mathcal{R}e(\langle x(t), \tilde{x}(t) \rangle). \quad (2.21)$$

Iz definicije skalarnega produkta (2.12) sledi še, da je

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt,$$

torej energija signala $\varepsilon(t)$ na intervalu (t_1, t_2) . Srednja kvadratna napaka, kot smo jo določili z (2.3),

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt$$

in $\|\varepsilon(t)\|^2$ sta zato v relaciji

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \|\varepsilon(t)\|^2. \quad (2.22)$$

Kot vidimo iz (2.22), se $\overline{\varepsilon^2(t)}$ in $\|\varepsilon(t)\|^2$ razlikujeta le za končen konstantni faktor. Zaradi tega najmanjša vrednost $\overline{\varepsilon^2(t)}$ hkrati pomeni tudi najmanjšo vrednost $\|\varepsilon(t)\|^2$ in obratno.

²Razmišljanje v obratni smeri ni enako. Metrični vektorski prostor ni nujno tudi normiran. Prav tako normiran vektorski prostor ni nujno tudi vektorski prostor s skalarnim produktom.

- Vrednosti $\overset{\dots\dots}{\varepsilon^2(t)}$ in $\|\varepsilon(t)\|^2$ lahko enakovredno uporabljamo kot kriterij za določanje kvalitete približka³.

2.3 Izražava signalov z linearno kombinacijo temeljnih funkcij

Vrnimo se ponovno na problem, podan v uvodnem razdelku 2.1.

Za poljuben signal $x(t)$ s končno energijo na omejenem časovnem intervalu (t_1, t_2) želimo določiti približek $\tilde{x}(t)$ signala $x(t)$

$$\tilde{x}(t) \approx x(t) \quad t_1 < t < t_2 .$$

V zvezi z zadano nalogo so ključna vsaj tri vprašanja:

1. S kakšnim namenom želimo določiti $\tilde{x}(t)$?
2. V kakšni obliki⁴ bomo predstavili približek?
3. Kako bomo vrednotili kvaliteto približka?

Določanje in uporaba približkov signalov je v tehniki in nasploh v naravoslovju kar pogosta. Razlogi so pri tem lahko zelo različni.

Uporaba približka v postopkih obdelave signalov lahko narekuje “*velika*” numerična zahtevnost določanja amplitud originalnega signala. Z uporabo približka želimo v tem primeru to zahtevnost zmanjšati ob še zadovoljivi natančnosti ocene.

Uporaba približka namesto originalnega signala je v določenih primerih obdelave potrebna, ker originalni signal ne poseduje zahtevanih analitičnih lastnosti (npr. zveznost, odvedljivost, ...), ki so nujno potrebne za izvedbo postopka.

V nekaterih primerih pa želimo z uvedbo približka poudariti oziroma modelirati nekatere specifične fizikalne lastnosti signala, ki so za analizo lastnosti signala oziroma za nadaljnji postopek obdelave pomembne.

Matematični model predstavitve približka je načelno lahko poljuben, iz komentarja pri primeru 2.1 pa se vidi, da bo največkrat približek potrebno sestaviti iz več vnaprej podanih funkcij na način, ki bo glede na zastavljeni kriterij zagotavljal dovolj dober rezultat.

$$\tilde{x}(t) = f(\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$$

- Funkcije, ki sestavljajo približek, imenujemo *temeljne funkcije*.

³V uvodnem primeru pri izvajanju relacije (2.5) na strani 21 smo prišli do iste ugotovitve.

⁴Oziroma, kakšen bo matematični model, ki bo opisoval približek.

Odnos med temeljnimi funkcijami $\phi_k(t)$ in parametri lahko prilagodimo posebnim zahtevam, ki jih pogojuje izbrana obdelava signalov.

- Eden najenostavnejših načinov oblikovanja približka, ki omogoča tudi uporabo predstavitve signalov v smislu vektorskega prostora in uporabo linearne algebre, je *linearna kombinacija* temeljnih funkcij:

$$\tilde{x}(t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \dots + C_n\phi_n(t). \quad (2.23)$$

Zvezo (2.23) navadno krajše zapišemo z

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i\phi_i(t). \quad (2.24)$$

Tak način izražave približka bomo uporabili tudi v nadaljevanju.

Kriterij določanja kvalitete približka direktno vpliva na izbiro optimalnega približka kot tudi na sam postopek njegovega določanja. Kriteriji so lahko različni. Največkrat uporabljen je ravno kriterij srednje kvadratne napake, ki smo ga definirali z (2.3) v razdelku 2.1:

$$\overset{\dots\dots}{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)|^2 dt.$$

Večkrat pa se na primer uporablja tudi kriterij srednje absolutne napake

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon(t)| dt,$$

ki bolj enakomerno upošteva vsa odstopanja $|\varepsilon(t)|$ in ni tako občutljiv na večja lokalna odstopanja, ki doprinesejo več k povprečju v primeru, ko odstopanja kvadriramo.

Če so pri iskanju približka najpomembnejša ravno največja odstopanja, je za kriterij smiselno izbrati kar največjo vrednost $\varepsilon(t)$ na intervalu (t_1, t_2) :

$$\sup_{t_1 < t < t_2} \varepsilon(t).$$

Ker $\overset{\dots\dots}{\varepsilon^2(t)}$ odraža povprečno moč signala napake $\varepsilon(t)$ in zaradi zveze (2.22), ki pri določanju približkov omogoča predstavitev v vektorskem prostoru signalov in uporabo postopkov linearne algebre, bomo v nadaljnjem izvajanju za kriterijsko funkcijo pri določanju optimalne izbire približka $\tilde{x}(t)$ uporabili prav srednjo kvadratno napako $\overset{\dots\dots}{\varepsilon^2(t)}$ oziroma ekvivalentno mero $\|\varepsilon(t)\|^2$.

2.3.1 Osnovni izrek

Predpostavimo, da približek $\tilde{x}(t)$ izrazimo kot v (2.24) z linearno kombinacijo temeljnih funkcij $\phi_i(t)$,

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i\phi_i(t),$$

in da za določitev kvalitete približka izberemo kriterij (2.20):

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = d^2(x(t), \tilde{x}(t)) .$$

Dokažimo veljavnost naslednje trditve.

- Vrednost $\|\varepsilon(t)\|^2$ je najmanjša, če je signal napake

$$\varepsilon(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

ortogonalen na vse temeljne funkcije $\phi_i(t)$, ki sestavljajo približek:

$$\langle \varepsilon(t), \phi_i(t) \rangle = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (2.25)$$

Dokaz

Recimo, da obstaja približek $\hat{x}(t)$, ki je boljši od $\tilde{x}(t)$ in je prav tako predstavljen z linearno kombinacijo temeljnih funkcij:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^n B_i \phi_i(t) . \quad (2.26)$$

Določimo kvadrat razdalje med $x(t)$ in $\hat{x}(t)$!

Najprej upoštevajmo⁵, da je

$$d^2(x(t), \hat{x}(t)) = d^2(x(t) - \tilde{x}(t), \hat{x}(t) - \tilde{x}(t))$$

in potem še (2.19):

$$\begin{aligned} d^2(x(t), \hat{x}(t)) &= \|x(t) - \tilde{x}(t)\|^2 + \|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)\|^2 - \\ &\quad 2\mathcal{R}e\langle x(t) - \tilde{x}(t), \hat{x}(t) - \tilde{x}(t) \rangle \\ &= \|\varepsilon(t)\|^2 + \|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)\|^2 - 2\mathcal{R}e\langle \varepsilon(t), \hat{x}(t) - \tilde{x}(t) \rangle . \end{aligned}$$

Zaradi (2.24) in (2.26) velja

$$\hat{x}(t) - \tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n (B_i - C_i) \phi_i(t) ,$$

zaradi predpostavke (2.25), da je signal napake $\varepsilon(t)$ ortogonalen na vse temeljne funkcije $\phi_i(t)$, ki sestavljajo približek, pa sledi

$$\langle \varepsilon(t), \hat{x}(t) - \tilde{x}(t) \rangle = 0 .$$

Zato je

$$d^2(x(t), \hat{x}(t)) = \|\varepsilon(t)\|^2 + \|\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)\|^2 . \quad (2.27)$$

Ker je desna stran izraza (2.27) predstavljena z vsoto dveh nenegativnih členov, bo razdalja $d^2(x(t), \hat{x}(t))$ najmanjša v primeru, ko bo

$$\hat{x}(t) = \tilde{x}(t) .$$

S tem smo zgornjo trditev dokazali.

⁵Zaradi (2.18) je

$$\begin{aligned} d^2(x(t) - \tilde{x}(t), \hat{x}(t) - \tilde{x}(t)) &= \langle x(t) - \tilde{x}(t) - (\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)), x(t) - \tilde{x}(t) - (\hat{x}(t) - \tilde{x}(t)) \rangle \\ &= \langle x(t) - \hat{x}(t), x(t) - \hat{x}(t) \rangle = d^2(x(t), \hat{x}(t)) . \end{aligned}$$

Posledici

- Približek $\tilde{x}(t)$ je pravokoten na signal napake $\varepsilon(t)$.

Ker je $\tilde{x}(t)$ določen z linearno kombinacijo temeljnih funkcij (2.24), je zaradi lastnosti linearnosti (2.15) skalarnega produkta

$$\langle \varepsilon(t), \tilde{x}(t) \rangle = \left\langle \varepsilon(t), \sum_{n=1}^n C_n \phi_n(t) \right\rangle = \sum_{n=1}^n \overline{C_n} \langle \varepsilon(t), \phi_n(t) \rangle = 0. \quad (2.28)$$

- Skalarni produkt med signalom $x(t)$ in njegovim približkom $\tilde{x}(t)$ je enak kvadratu norme približka $\tilde{x}(t)$

$$\langle x(t), \tilde{x}(t) \rangle = \|\tilde{x}(t)\|^2. \quad (2.29)$$

Povezavo (2.29) z upoštevanjem posledice (2.28) izpeljemo iz zveze, da je

$$\langle x(t), \tilde{x}(t) \rangle = \langle \tilde{x}(t) + \varepsilon(t), \tilde{x}(t) \rangle = \langle \tilde{x}(t), \tilde{x}(t) \rangle + \langle \varepsilon(t), \tilde{x}(t) \rangle.$$

2.3.2 Vrednosti srednje kvadratne napake in koeficientov C_i pri optimalni izbiri približka

Predpostavimo, da približek $\tilde{x}(t)$ izpolnjuje zahtevo (2.25). V tem primeru je⁶

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = \|x(t) - \tilde{x}(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 + \|\tilde{x}(t)\|^2 - \langle x(t), \tilde{x}(t) \rangle - \overline{\langle x(t), \tilde{x}(t) \rangle}.$$

Ker je zaradi (2.29)

$$\langle x(t), \tilde{x}(t) \rangle = \overline{\langle x(t), \tilde{x}(t) \rangle} = \|\tilde{x}(t)\|^2,$$

je

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 - \|\tilde{x}(t)\|^2. \quad (2.30)$$

Izraz (2.30) lahko razumemo tudi kot posplošitev *Pitagorovega izreka* na vektorski prostor signalov $L^2_{(t_1, t_2)}$.

Če v (2.30) upoštevamo, da je približek linearna kombinacija temeljnih funkcij, dobimo

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(t)\|^2 &= \|x(t)\|^2 - \langle \tilde{x}(t), \tilde{x}(t) \rangle \\ &= \|x(t)\|^2 - \left\langle \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t), \sum_{j=1}^n C_j \phi_j(t) \right\rangle \\ &= \|x(t)\|^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i \overline{C_j} \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

⁶Če sledimo izpeljavi v izrazu (2.19) in (2.20) na strani 27.

in iz (2.22)

$$\overset{\dots\dots}{\varepsilon^2}(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \|x(t)\|^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i \overline{C_j} \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle \right\}. \quad (2.32)$$

Določimo še optimalne vrednosti koeficientov C_i .

Zaradi (2.25) je

$$\langle x(t), \phi_j(t) \rangle = \langle \tilde{x}(t) + \varepsilon(t), \phi_j(t) \rangle = \langle \tilde{x}(t), \phi_j(t) \rangle \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Spet upoštevajmo, da je približek $\tilde{x}(t)$ linearna kombinacija temeljnih funkcij $\phi_i(t)$:

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t), \phi_j(t) \right\rangle &= \langle x(t), \phi_j(t) \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n C_i \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle &= \langle x(t), \phi_j(t) \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.33)$$

Izraz (2.33) predstavlja nehomogen sistem n linearnih enačb za n koeficientov C_i .

$$\begin{aligned} C_1 \langle \phi_1(t), \phi_1(t) \rangle + C_2 \langle \phi_2(t), \phi_1(t) \rangle + \dots + C_n \langle \phi_n(t), \phi_1(t) \rangle &= \langle x(t), \phi_1(t) \rangle \\ C_1 \langle \phi_1(t), \phi_2(t) \rangle + C_2 \langle \phi_2(t), \phi_2(t) \rangle + \dots + C_n \langle \phi_n(t), \phi_2(t) \rangle &= \langle x(t), \phi_2(t) \rangle \\ &\vdots \\ &\vdots \\ C_1 \langle \phi_1(t), \phi_n(t) \rangle + C_2 \langle \phi_2(t), \phi_n(t) \rangle + \dots + C_n \langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle &= \langle x(t), \phi_n(t) \rangle \end{aligned}$$

Sistem (2.33) lahko predstavimo tudi v matrični obliki

$$\mathbf{\Lambda} \vec{C} = \vec{b},$$

kjer je

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \langle \phi_1(t), \phi_1(t) \rangle & \langle \phi_2(t), \phi_1(t) \rangle & \dots & \langle \phi_n(t), \phi_1(t) \rangle \\ \langle \phi_1(t), \phi_2(t) \rangle & \langle \phi_2(t), \phi_2(t) \rangle & \dots & \langle \phi_n(t), \phi_2(t) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_1(t), \phi_n(t) \rangle & \langle \phi_2(t), \phi_n(t) \rangle & \dots & \langle \phi_n(t), \phi_n(t) \rangle \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

in

$$\vec{b} = (\langle x(t), \phi_1(t) \rangle, \langle x(t), \phi_2(t) \rangle, \dots, \langle x(t), \phi_n(t) \rangle).$$

- Sistem (2.33) je rešljiv in ima eno samo rešitev v primeru, ko je matrika $\mathbf{\Lambda}$, ki jo sestavljajo skalarni produkti $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle$, obrnljiva:

$$\vec{C} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \vec{b}.$$

Izkaže se, da je to res natanko takrat, ko so temeljne funkcije $\phi_i(t)$, ki sestavljajo približek, linearno neodvisne.

To je tudi smiselna zahteva za izbiro temeljnih funkcij.

V primeru, ko bi končnemu zaporedju $n - 1$ temeljnih funkcij dodali novo funkcijo, ki bi bila od prejšnjih linearno odvisna

$$\phi_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} B_i \phi_i(t),$$

pri kvaliteti približka nič ne pridobimo, saj je

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(t) = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \phi_i(t) + C_n \sum_{i=1}^{n-1} B_i \phi_i(t) = \sum_{i=1}^{n-1} D_i \phi_i(t)$$

še vedno samo linearna kombinacija $n - 1$ funkcij $\phi_i(t)$.

Za določitev optimalne zgradbe približka $\tilde{x}(t)$ je potemtakem potrebno rešiti nehomogen sistem linearnih enačb. V praksi se te naloge lotimo z uporabo ustreznega numeričnega postopka⁷. Za vsako novo dodano temeljno funkcijo je potrebno rešiti nov, za eno dimenzijo obsežnejši, sistem enačb. To lahko pri velikem številu temeljnih funkcij, iz katerih želimo sestaviti približek, predstavlja resen numerični problem. Prav tako moramo na osnovi (2.32) tudi vsakič v celoti znova določiti vrednost srednje kvadratne napake.

Da zagotovimo enostavnejše določanje optimalnih vrednosti koeficientov C_i in srednje kvadratne napake $\varepsilon^2(t)$, se je smiselno pri izbiri linearno neodvisnih temeljnih funkcij omejiti.

2.3.3 Ortogonalne temeljne funkcije

- Privzemimo, da za neskončno zaporedje neničelnih linearno neodvisnih temeljnih funkcij $\{\phi_i(t)\}$ velja lastnost

$$\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i, & i = j. \end{cases} \quad (2.34)$$

V tem primeru zaporedje $\{\phi_i(t)\}$ imenujemo *ortogonalno zaporedje* temeljnih funkcij oziroma pravimo, da so temeljne funkcije $\phi_i(t)$ med sabo *ortogonalne* ali pravokotne.

Vrednosti koeficientov K_i so pozitivne, saj je

$$K_i = \langle \phi_i(t), \phi_i(t) \rangle = \|\phi_i(t)\|^2 > 0. \quad (2.35)$$

V primeru, ko je

$$K_i = 1 \quad \text{za vse } i,$$

zaporedje ortogonalnih temeljnih funkcij imenujemo *ortonormalno zaporedje*⁸.

⁷Na primer postopek *Gaussove eliminacije* ali postopek *Choleskega*.

⁸Vsako ortogonalno zaporedje lahko spremenimo v ortonormalno zaporedje, tako da temeljne funkcije $\phi_i(t)$ delimo z $\|\phi_i(t)\|$.

Ko je zaporedje temeljnih funkcij ortogonalno, se zaradi lastnosti (2.34) izraz za določanje minimalne vrednosti srednje kvadratne napake (2.32) in zapis sistema enačb za koeficiente C_i (2.33) močno poenostavi. Ker je

$$\sum_{i=1}^n C_i \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = C_j \langle \phi_j(t), \phi_j(t) \rangle = C_j K_j ,$$

je

$$C_j K_j = \langle x(t), \phi_j(t) \rangle \quad j = 1, 2, \dots, n$$

in zato

$$C_j = \frac{\langle x(t), \phi_j(t) \rangle}{K_j} . \quad (2.36)$$

Če upoštevamo definicijo skalarnega produkta v vektorskem prostoru signalov (2.12), je

$$C_j = \frac{1}{K_j} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \overline{\phi_j(t)} dt , \quad (2.37)$$

kjer je

$$K_j = \int_{t_1}^{t_2} |\phi_j(t)|^2 dt . \quad (2.38)$$

- Iz zveze (2.37) sledi, da je vrednost koeficienta C_j v približku odvisna le od signala $x(t)$ in temeljne funkcije $\phi_j(t)$. To pomeni, da so vrednosti koeficientov C_i , ki določajo približek, med sabo neodvisne.

Lastnost neodvisnosti koeficientov C_i v približku je pomembna tudi s stališča ekonomičnosti določanja približkov z več temeljnimi funkcijami. Že določenih vrednosti koeficientov ni potrebno ponovno določiti, ko v približek dodamo novo temeljno funkcijo.

Ker je

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i \overline{C_j} \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = \sum_{i=1}^n C_i \overline{C_i} \langle \phi_i(t), \phi_i(t) \rangle = \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i ,$$

je

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \|x(t)\|^2 - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i \right\} \quad (2.39)$$

oziroma

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i \right\} . \quad (2.40)$$

2.3.4 Polnost zaporedja temeljnih funkcij

Označimo z $\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t)$ srednjo kvadratno napako v primeru, ko smo približek sestavili iz n temeljnih funkcij:

$$\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i \right\}.$$

Ker so koeficienti C_i med seboj neodvisni, je

$$\begin{aligned} \overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_{n+1}^2(t) &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n |C_i|^2 K_i - K_{n+1} |C_{n+1}|^2 \right\} \\ &= \overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t) - \frac{K_{n+1} |C_{n+1}|^2}{t_2 - t_1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Ker srednja kvadratna napaka predstavlja povprečno moč signala $\varepsilon(t)$, je vedno

$$\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t) \geq 0, \quad \text{za vsak } n.$$

Prav tako (2.35) so pozitivni tudi vsi koeficienti K_n :

$$K_n > 0, \quad \text{za vsak } n.$$

Zato iz zveze (2.41) sledi, da je

$$\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t) \geq \overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_{n+1}^2(t). \quad (2.42)$$

- Zaporedje vrednosti srednjih kvadratnih napak $\{\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t)\}$ je monotono padajoče in navzdol omejeno zaporedje.

Monotonost zagotavlja neenačba (2.42), zaporedje pa je navzdol omejeno s spodnjo mejo 0, saj gre za zaporedje samih nenegativnih vrednosti. Kot vemo iz matematične analize [3], ima vsako navzdol omejeno monotono padajoče zaporedje limito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t) = a.$$

Lastnost, da je zaporedje srednjih kvadratnih napak monotono padajoče, nam zagotavlja, da z dodajanjem novih temeljnih funkcij v približek, kvaliteto približka izboljšujemo. Limitna vrednost a pa je pomembna zaradi tega, ker nam določi mejo kvalitete približka, ki je ni mogoče preseči. Za

$$a > 0$$

to pomeni, da bo

$$\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t) \geq a > 0, \quad \text{za vsak } n.$$

- S stališča določanja približkov je zato najbolj ugodno, če pri danem ortogonalnem zaporedju temeljnih funkcij $\{\phi_i(t)\}$ za vsak signal $x(t)$ iz vektorskega prostora $L^2_{(t_1, t_2)}$ velja

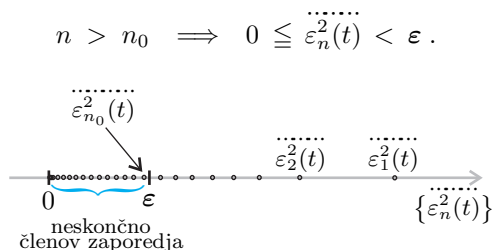
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\dots\dots}{\varepsilon_n^2(t)} = 0. \quad (2.43)$$

Tako zaporedje temeljnih funkcij imenujemo *polno zaporedje* oziroma pravimo, da zaporedje temeljnih funkcij izpolnjuje pogoj *polnosti*.

Zaradi (2.43) za polno zaporedje temeljnih funkcij velja, da lahko s približkom, ki je določen s končnim številom temeljnih funkcij n_0 , presežemo vsako končno vnaprej predpisano vrednost srednje kvadratne napake

$$\varepsilon > 0.$$

Iz definicije limite [4] namreč sledi (slika 2.9), da je za vsak $\varepsilon > 0$ izpolnjena zahteva



Slika 2.9: Zaporedje vrednosti srednjih kvadratnih napak

Pri kriteriju srednje kvadratne napake in približku v obliki linearne kombinacije temeljnih funkcij smo tako definirali konvergenten postopek, ki nam v končnem številu korakov zagotavlja vnaprej predpisano kvaliteto⁹ približka. Konvergenco postopka nam zagotavlja polno ortogonalno neskončno zaporedje temeljnih funkcij $\{\phi_n(t)\}$ v prostoru signalov $L^2_{(t_1, t_2)}$.

Ali taka zaporedja sploh obstajajo?

Kot bomo videli v nadaljevanju, je takih zaporedij temeljnih funkcij veliko. V sledečem razdelku pa bomo pokazali, da lahko iz vsakega neskončnega zaporedja linearno neodvisnih funkcij v $L^2_{(t_1, t_2)}$ vedno določimo pripadajoče ortogonalno zaporedje.

Primer 2.2

Zaporedje temeljnih funkcij

$$\{\sin(2n-1)t\} = \{\sin t, \sin 3t, \sin 5t, \dots\}$$

je ortogonalno zaporedje temeljnih funkcij v $L^2_{(0, 2\pi)}$.

⁹Pojem "kvaliteta" je v tem primeru opredeljen z velikostjo srednje kvadratne napake.

Za signal $x(t)$, ki smo ga obravnavali v primeru 2.1 na strani 22 (slika 2.5), določimo približek $\tilde{x}_6(t)$ z linearno kombinacijo prvih 6-ih temeljnih funkcij zgornjega zaporedja:

$$\tilde{x}_6(t) = C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \dots + C_6\phi_6(t).$$

Določimo vrednost srednje kvadratne napake $\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_6^2(t)$ in potek približka $\tilde{x}_6(t)$ ter signala napake $\varepsilon_6(t)$. Poiščimo tudi tisto najmanjše število prvih n_0 temeljnih funkcij, da bo izpolnjena zahteva

$$\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_{n_0}^2(t) < 0,0001.$$

Rešitev

Po (2.37) in ob upoštevanju poteka signala $x(t)$ so vrednosti koeficientov v približku enake

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{K_n} \int_0^{2\pi} x(t) \sin(2n-1)t dt \\ &= \frac{1}{K_n} \int_0^{\pi} \sin(2n-1)t dt - \frac{1}{K_n} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(2n-1)t dt. \end{aligned}$$

Iz (2.38) določimo

$$K_n = \int_0^{2\pi} \sin^2(2n-1)t dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2(2n-1)t}{4(2n-1)} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

in dobimo

$$C_n = \frac{1}{\pi(2n-1)} \left\{ -\cos(2n-1)t \Big|_0^{\pi} + \cos(2n-1)t \Big|_{\pi}^{2\pi} \right\} = \frac{4}{\pi(2n-1)}.$$

Torej

$$C_1 = \frac{4}{\pi}, C_2 = \frac{4}{3\pi}, \dots, C_6 = \frac{4}{11\pi}.$$

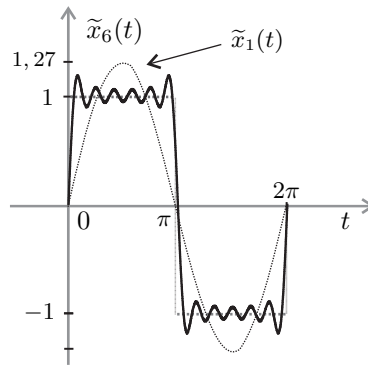
Potek približka $\tilde{x}_6(t)$, izraženega s 6-imi temeljnimi funkcijami, je podan na sliki 2.10, kjer sta prikazana tudi poteka signala $x(t)$ in približka $\tilde{x}_1(t)$ z eno temeljno funkcijo, ki smo ga določili v primeru 2.1.

Vrednost srednje kvadratne napake $\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t)$ določimo na osnovi (2.40):

$$\begin{aligned} \overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_n^2(t) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 dt - \sum_{i=1}^n K_i |C_i|^2 \right\} = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2\pi - \sum_{i=1}^n \pi \left(\frac{4}{\pi(2i-1)} \right)^2 \right\} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)^2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Za $n = 6$, je

$$\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon}_6^2(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} \right) \doteq 0,034.$$

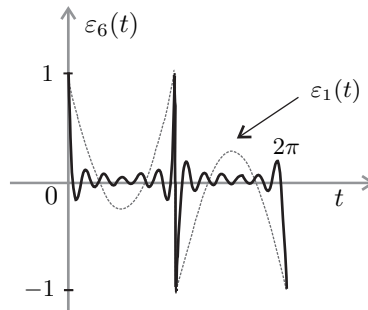


Slika 2.10: Približka $\tilde{x}_6(t)$ in $\tilde{x}_1(t)$ ter signal $x(t)$ na intervalu $(0, 2\pi)$

Poteka signalov napak

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(t) &= x(t) - C_1 \sin t, \\ \varepsilon_6(t) &= x(t) - (C_1 \sin t + C_2 \sin 3t + \dots + C_6 \sin 11t)\end{aligned}$$

sta podana na sliki 2.11.



Slika 2.11: Signala napak $\varepsilon_6(t)$ in $\varepsilon_1(t)$

Ker velja [5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

iz (2.44) za signal $x(t)$ sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon_n^2(t)} = 0.$$

Za predpisano vrednost napake $\varepsilon = 0,0001$ tako lahko poiščemo najmanjše število prvih n_0 temeljnih funkcij, da bo

$$\overset{\dots\dots\dots}{\varepsilon_{n_0}^2(t)} < 0,0001.$$

Z uporabo rekurzivne zveze za srednjo kvadratno napako (2.44)

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^2(t) &= 1, \\ \varepsilon_{n+1}^2(t) &= \varepsilon_n^2(t) - \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2},\end{aligned}$$

po 2027-ih korakih prvič dosežemo manjšo srednjo kvadratno napako od 0,0001. Torej

$$n_0 = 2027.$$

2.3.5 Postopek Gramma in Schmidta

- Naj bo $\{\vartheta_i(t)\}$ zaporedje linearno neodvisnih temeljnih funkcij. Postopek *Gramma in Schmidta* je iterativni postopek, s katerim takemu zaporedju priredimo zaporedje ortonormalnih temeljnih funkcij $\{\phi_i(t)\}$:

$$\{\vartheta_i(t)\} \longrightarrow \{\phi_i(t)\}.$$

Postopek poteka v naslednjih korakih:

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &= \frac{\vartheta_1(t)}{\|\vartheta_1(t)\|}, \\ w_k(t) &= \vartheta_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \vartheta_k(t), \phi_i(t) \rangle \phi_i(t), \quad k = 2, 3, \dots, \\ \phi_k(t) &= \frac{w_k(t)}{\|w_k(t)\|}.\end{aligned}\tag{2.45}$$

V koraku (2.45) od signala $\vartheta_k(t)$ odštejemo približek tega signala, izražen s prej določenimi ortonormalnimi temeljnimi funkcijami. Zaradi optimalnosti postopka določanja približka v smislu minimalne srednje kvadratne napake (2.25) je ta razlika ortogonalna (pravokotna) na vse temeljne funkcije, ki približek določajo

$$\langle w_k(t), \phi_i(t) \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

V naslednjem koraku funkcijo $w_k(t)$ normiramo in tako pridobimo k -to ortonormalno temeljno funkcijo zaporedja.

Primer 2.3

Zaporedje potenc

$$\vartheta_i(t) = t^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

je neskončno zaporedje linearno neodvisnih funkcij na vsakem končnem časovnem intervalu (t_1, t_2) , ki pa ni ortogonalno.

Po postopku Gramma in Schmidta zaporedju treh linearno neodvisnih funkcij

$$\{1, t, t^2\}$$

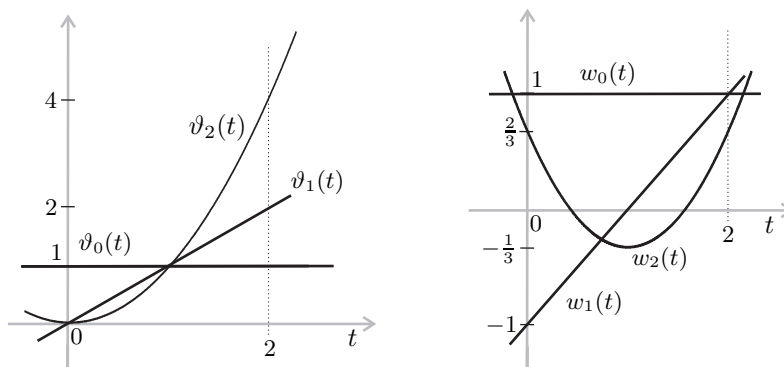
na časovnem intervalu $(0, 2)$ priredimo zaporedje ortogonalnih funkcij

$$\{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t)\}.$$

Rešitev

$$\begin{aligned}
w_0(t) &= 1 \\
\|w_0(t)\|^2 &= \int_0^2 dt = 2 \\
\phi_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\langle t, \phi_0(t) \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = \sqrt{2} \\
w_1(t) &= t - 1 \\
\|w_1(t)\|^2 &= \int_0^2 (t-1)^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2}{3} \\
\phi_1(t) &= \sqrt{\frac{3}{2}}(t-1) \\
\langle t^2, \phi_0(t) \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^2 t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\
\langle t^2, \phi_1(t) \rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^2 t^2(t-1) dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\
w_2(t) &= t^2 - 2(t-1) - \frac{4}{3} = t^2 - 2t + \frac{2}{3} \\
\|w_2(t)\|^2 &= \int_0^2 \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3}\right)^2 dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{9} + \frac{t}{9} \right]_{-1}^{+1} = \frac{8}{45} \\
\phi_2(t) &= \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(t^2 - 2t + \frac{2}{3}\right).
\end{aligned}$$

Potek temeljnih funkcij $\{\vartheta_0(t), \vartheta_1(t), \vartheta_2(t)\}$ in $\{w_0(t), w_1(t), w_2(t)\}$ je prikazan na sliki 2.12.



Slika 2.12: Linearno neodvisne funkcije $\{\vartheta_0(t), \vartheta_1(t), \vartheta_2(t)\}$ in ortogonalne funkcije $\{w_0(t), w_1(t), w_2(t)\}$

2.4 Nekatera polna zaporedja temeljnih funkcij

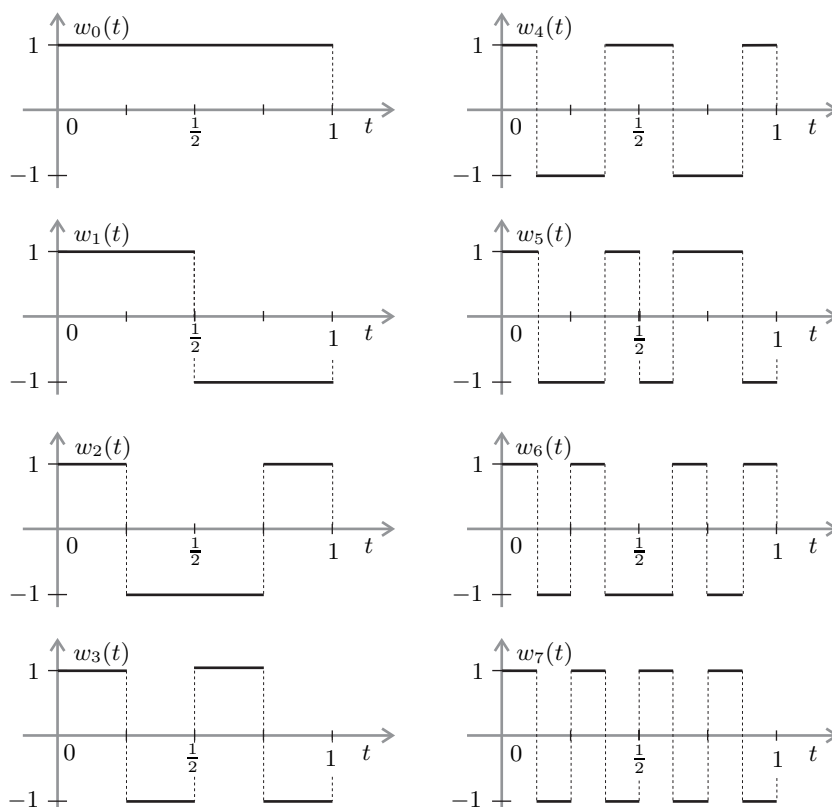
2.4.1 Walsheve temeljne funkcije

Walsheve temeljne funkcije $\{w_i(t)\}$ predstavljajo polno zaporedje ortonormalnih temeljnih funkcij na časovnem intervalu $0 < t < 1$ [6].

Vse Walsheve temeljne funkcije (slika 2.13) so odsekoma konstantne funkcije s samo dvema možnima amplitudama:

$$w_i(t) \in \{-1, +1\}. \quad (2.46)$$

Zaradi zgornje lastnosti (2.46) so Walsheve funkcije predstavnik razredov temeljnih funkcij, pri katerih postopek določanja njihovih amplitud ne zahteva uporabe velikega števila¹⁰ aritmetičnih operacij. Zaradi binarne narave zapisa amplitud Walshevih funkcij je njihova predstavitev še posebej primerna za uporabo na digitalnih računalnikih.



Slika 2.13: Prvih 8 Walshevih temeljnih funkcij

¹⁰V primeru Walshevih funkcij "računanje" vrednosti amplitud sploh ni potrebno!

Zaporedje prvih 2^n Walshevih funkcij je mogoče enostavno pridobiti iz $2^n \times 2^n$ dimenzionalne *Hadamardove* matrike $\mathbf{H}(n)$.

Hadamardove matrike so kvadratne ortogonalne matrike z lastnostjo

$$\mathbf{H}(n)\mathbf{H}(n) = 2^n I$$

in z elementi h_{ij} , katerih vrednosti so ravno tako kot amplitude Walshevih funkcij enake

$$h_{ij} = \pm 1 .$$

Za njihovo določitev obstaja enostaven rekurzivni postopek:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(0) &= (1) , \\ \mathbf{H}(n+1) &= \begin{pmatrix} \mathbf{H}(n) & \mathbf{H}(n) \\ \mathbf{H}(n) & -\mathbf{H}(n) \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Walsheve funkcije iz Hadamardove matrike pridobimo tako, da vsaki vrstici ali stolpcu matrike priredimo po eno Walshevo funkcijo. Interval na območju $(0, 1)$ razdelimo na toliko enako dolgih podintervalov, kot je število elementov v eni vrstici matrike. Za tem vsakemu podintervalu priredimo vrednost Walsheve funkcije, ki je enaka vrednosti pripadajočega elementa h_{ij} matrike.

Primer 2.4

Določimo Hadamardovo matriko $\mathbf{H}(2)$ in ugotovimo, katere so pripadajoče Walsheve funkcije!

Rešitev

Matriko $\mathbf{H}(2)$ po (2.47) zgradimo takole:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(0) &= (1) , \\ \mathbf{H}(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \\ \mathbf{H}(2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Matriki $\mathbf{H}(2)$ po vrsticah priredimo prve 4 Walsheve funkcije: prvi vrstici ustreza funkcija $w_0(t)$, drugi $w_3(t)$, tretji $w_1(t)$ in četrti $w_2(t)$.

Komentar

Kot opazimo, smo prirejene funkcije dobili v drugem vrstnem redu, kot jih označujejo indeksi temeljnih funkcij.

- Ureditev, ki jo implicirajo oznake Walshevih funkcij s slike 2.13 imenujemo *sekvenčna*¹¹. Pri tem sekvenco Walsheve funkcije definiramo kot število sprememb predznaka funkcije.

Prednost pri uporabi Walshevih temeljnih funkcij je njihova preprosta izražava, ki omogoča hitro določanje vrednosti koeficientov C_i in amplitud približka $\tilde{x}(t)$. Ker je vrednost $w_i(t)$ lahko le $+1$ ali -1 , je potrebno pri numeričnem določanju vrednosti C_i oziroma kasneje pri $\tilde{x}(t)$ uporabiti le aritmetični operaciji seštevanja in odštevanja. Če signal $x(t)$ vzorčimo s časovnim razmakom Δt ob M časovnih trenutkih, dobimo:

$$C_i = \int_0^1 x(t) w_i(t) dt \approx \sum_{k=0}^{M-1} x(k \Delta t) w_i(k \Delta t) \Delta t = \Delta t \sum_{k=0}^{M-1} \pm x(k \Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=0}^n C_i w_i(t) = \sum_{i=0}^n \pm C_i.$$

Pri dodatni uporabi hitrega postopka [7] izračuna vrednosti koeficientov C_i imamo tako na razpolago izredno učinkovit postopek določanja približkov, ki je posebno uporaben pri aproksimaciji signalov, ki so tudi sami podobne narave kot Walsheve funkcije. To so na primer digitalne binarne ali sive slike [8]. Zato se je uporaba Walshevih funkcij že zelo zgodaj uveljavila pri kodiranju in prenosu digitalnih televizijskih signalov [7]. Znan je primer uporabe takega načina kodiranja televizijske slike v ameriškem vesoljskem projektu Apollo¹² v 60-ih in 70-ih letih prejšnjega stoletja.

Približek, predstavljen z linearno kombinacijo Walshevih funkcij, je zaradi narave teh funkcij vedno odsekoma konstantna funkcija. To pomeni, da gre le za odsekoma zvezno funkcijo, katere odvod je povsod tam, kjer je zvezna, enak 0.

2.4.2 Haarove temeljne funkcije

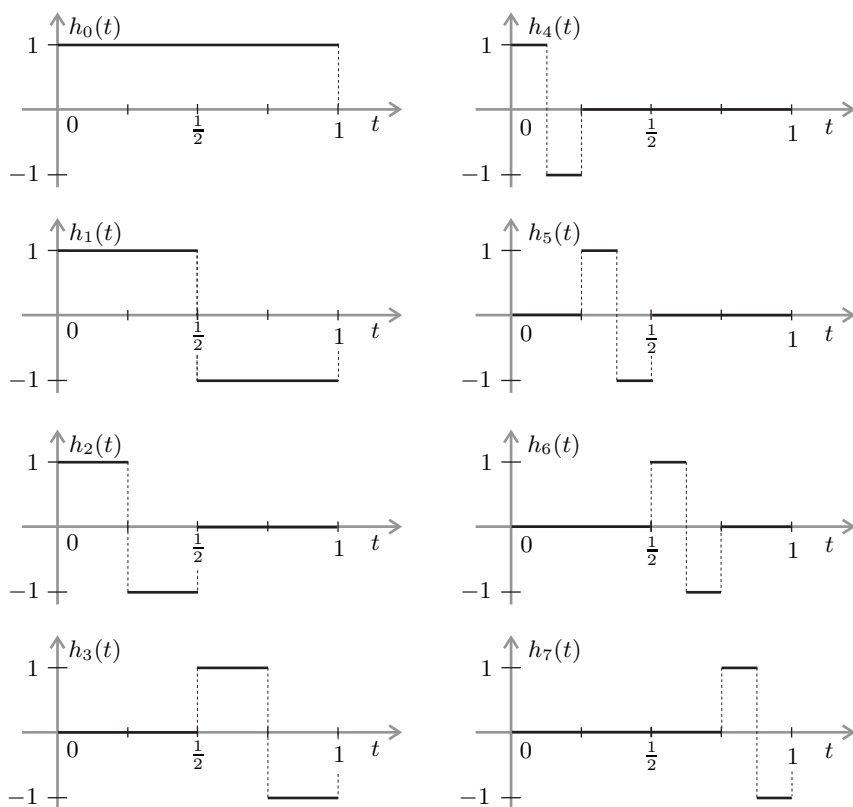
Po svoji naravi so Haarove temeljne funkcije $\{h_i(t)\}$ podobne Walshevim. Predstavljajo polno zaporedje ortogonalnih temeljnih funkcij na časovnem intervalu $0 < t < 1$ [9].

Tudi vse Haarove temeljne funkcije (slika 2.14) so odsekoma konstantne funkcije, tokrat s tremi možnimi amplitudami:

$$h_i(t) \in \{-1, 0, +1\}. \quad (2.48)$$

¹¹Pojem sekvenca lahko približno enačimo s pojmom frekvence, ki ga bomo spoznali v razdelku 2.4.4 pri trigonometrijskih temeljnih funkcijah.

¹²Projekt Apollo je bil vesoljski projekt ameriške agencije NASA, v okviru katerega je človek prvič stopil na Luno.



Slika 2.14: Prvih 8 Haarovih temeljnih funkcij

Razen funkcije $h_0(t)$ vse sledijo enakemu amplitudnemu poteku. Na intervalu, kjer so od nič različne, zavzamejo na prvi polovici vrednost 1 in na drugi polovici vrednost -1 . Pri definiranju Haarovih temeljnih funkcij izhajamo iz iterativne delitve intervala $(0, 1)$ na 2^n enakih delov, ki pri vsaki delitvi da novih 2^n Haarovih funkcij. Pri tem ima na $2^n - 1$ podintervalih Haarova funkcija vrednost 0, na preostalem podintervalu pa stalno od nič različno obliko. Postopek generiranja in potek prvih 8 Haarovih funkcij je prikazan na sliki 2.14.

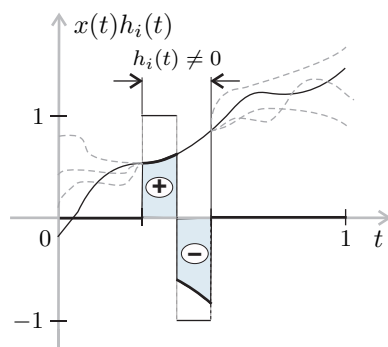
Haarove funkcije niso ortonormalne. Njihova energija se manjša skladno s krajšanjem časovnega intervala, na katerem so različne od nič. Tako velja:

$$\begin{aligned} K_0 = K_1 &= 1, \\ K_2 = K_3 &= \frac{1}{2}, \\ K_4 = \dots = K_7 &= \frac{1}{4}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Iz definicije poteka Haarovih temeljnih funkcij sledijo nekatere posebne lastnosti

koeficientov C_i , ki določajo približek.

- Koeficienti približka C_i so lokalno odvisni od vrednosti amplitud signala $x(t)$.
- Vrednost koeficienta približka C_i podaja oceno, v kolikšni meri vrednost signala $x(t)$ na podintervalu, kjer je pripadajoča Haarova funkcija $h_i(t)$ od nič različna, v povprečju narašča oziroma pada.



Slika 2.15: Zmnožek signala $x(t)$ in Haarove temeljne funkcije $h_i(t)$. Črtkano so označeni alternativni poteki signala $x(t)$, ki ne vplivajo na vrednost koeficienta C_i , ki ga določimo z i -to Haarovo funkcijo.

Zgornji lastnosti si razložimo s potekom signalov $x(t)$ in $h_i(t)$ na sliki 2.15.

Ker je i -ta Haarova funkcija $h_i(t)$ od nič različna le na delu celotnega območja, na katerem so Haarove funkcije ortogonalne, potek signala $x(t)$ izven tega območja ne vpliva na vrednost pripadajočega koeficienta C_i . Na sliki 2.15 je to ponazorjeno s črtkano označenimi alternativnimi poteki signala $x(t)$.

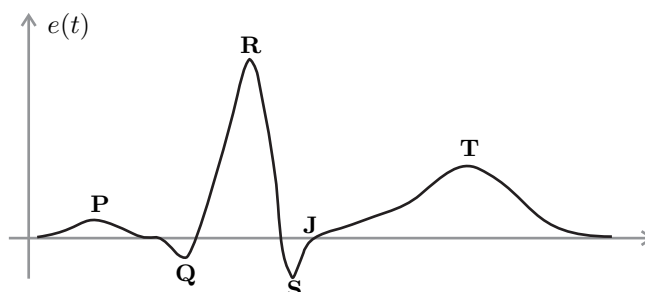
Vse Haarove funkcije, razen $h_0(t)$, so na intervalu, na katerem so različne od nič, enake oblike. Zaradi tega negativni predznak pripadajočega koeficienta C_i v približku pomeni, da so bile amplitude signala $x(t)$ na drugi polovici tega intervala v povprečju večje kot na prvi polovici. C_i je namreč po (2.37) določen z integralom zmnožka med signalom in temeljno funkcijo, to je z $x(t) \cdot h_i(t)$. Iz predznaka in velikosti koeficienta C_i lahko zato, podobno kot v matematični analizi iz odvoda funkcije, sklepamo o hitrosti in smeri spreminjanja amplitud signala $x(t)$ na pripadajočem časovnem intervalu. Na sliki 2.15 je ponazorjen primer, kjer na intervalu, na katerem je Haarova funkcija $h_i(t)$ različna od nič, signal $x(t)$ narašča in je zato $C_i < 0$.

Primer 2.5

Lokalna občutljivost in zveza vrednosti koeficientov C_i z naraščanjem oziroma padanjem amplitud signala je bila s pridom uporabljena pri študiji, ki je obravnavala samodejno obdelavo EKG¹³ signalov [10].

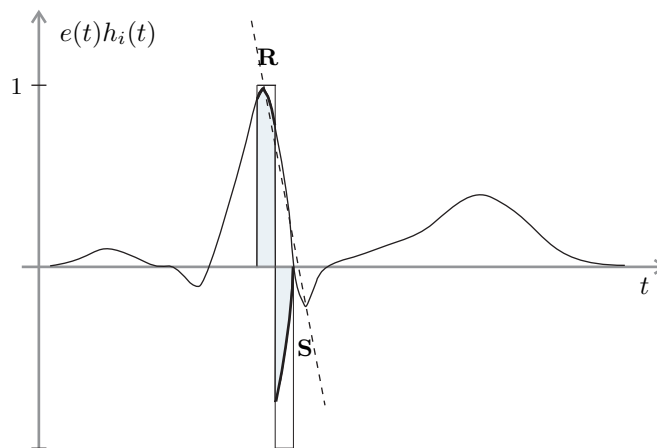
EKG signal, ki ga zaznamo z merjenjem sprememb električnih potencialov na telesni površini, je odraz aktivnosti delovanja srca in predstavlja s svojimi značilnimi oblikami približno periodičen signal. Obliko signala oziroma njegove spremembe

¹³EKG je kratica za elektrokardiogram.



Slika 2.16: Potek ene periode EKG signala $e(t)$ z označenimi klinično pomembnimi točkami

je mogoče uspešno uporabiti v medicinski diagnostiki. Ugotavljanje vrednosti posameznih parametrov, kot so na primer položaj in velikosti lokalnih minimumov in maksimumov (slika 2.16), je smiselno avtomatizirati in s tem razbremeniti zdravstveno osebje rutinskih opravil. Za pravilno določitev parametrov pa je potreben zanesljiv samodejni postopek, ki je v kvaziperiodičnem signalu, kot je EKG, sposoben razpoznati referenčne točke.



Slika 2.17: Zmnožek EKG signala $e(t)$ in Haarove funkcije $h_i(t)$, ki je različna od nič v predelu med ekstremoma \mathbf{R} in \mathbf{S} . Črtkano je označena \mathbf{RS} spojnica.

Po obliki najbolj izrazit del v poteku signala EKG je predel, ki ga označujejo točke \mathbf{Q} , \mathbf{R} in \mathbf{S} . Najbolj značilni del tega dela pa je izrazita negativna spojnica \mathbf{RS} . Če pravilno odkrijemo ta del v signalu, od tu dalje odkrijemo točko \mathbf{R} ter levo in desno od tod druge značilne ekstreme v signalu. Lastnost lokalne občutljivosti in lastnost koeficientov C_i Haarovih funkcij, da se hitri lokalni padec amplitude signala odraža v veliki pozitivni vrednosti koeficienta, so bile v tem primeru uporabljene za izvedbo uspešnega postopka odkrivanja segmenta \mathbf{RS} (slika 2.17).

Komentar

Zaradi podobnosti med Walshevimi in Haarovimi funkcijami velja, da lahko prvih

2^n Walshevih temeljnih funkcij izrazimo z linearno kombinacijo Haarovih funkcij in obratno. Približki, pridobljeni s prvimi 2^n Walshevimi ali Haarovimi funkcijami, se med seboj ne razlikujejo. Razlika pri uporabi obeh sistemov je v interpretaciji pomena koeficientov C_i , ki določajo približek. Posplošitev načina določanja Haarovih temeljnih funkcij je v zadnjem času [11] privedla do definicije cele družine novih temeljnih funkcij, ki omogočajo poseben način časovno–merilne predstavitve signalov¹⁴. Govorimo o tako imenovani *valčni transformaciji*¹⁵.

2.4.3 Ortogonalni polinomi

Kot smo že omenili v primeru 2.3, tvori zaporedje potenc

$$t^0, t^1, t^2, \dots$$

neskončno zaporedje linearno neodvisnih temeljnih funkcij na vsakem končnem časovnem intervalu

$$t_1 < t < t_2 .$$

Z različnimi postopki¹⁶ lahko iz tega zaporedja pridobimo neskončna polna zaporedja temeljnih funkcij, sestavljena iz linearnih kombinacij potenc – polinomov

$$\phi_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 .$$

Polinomi so zvezne in poljubnokrat zvezno odvedljive funkcije. Približek, ki ga bomo sestavili z linearno kombinacijo končnega števila polinomov, bo prav tako polinom in zato poljubnokrat zvezno odvedljiva funkcija. Ker lahko vrednosti potenc t^n iterativno določamo¹⁷,

$$t^n = t \cdot t^{(n-1)} ,$$

število potrebnih aritmetičnih operacij le linearno narašča v odvisnosti od stopnje polinoma.

Primer ortogonalnih polinomov v prostoru signalov $L^2_{(-1,+1)}$ so Legendrovi polinomi $\{L_n(t)\}$ [13], določeni z

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} ((t^2 - 1)^n) . \quad (2.49)$$

Pripadajoči koeficienti K_n so

$$K_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} . \quad (2.50)$$

¹⁴Za podrobnejšo obrazložitev časovno–merilnih predstavitev glej na primer [12].

¹⁵Angleško *Wavelet Transform*.

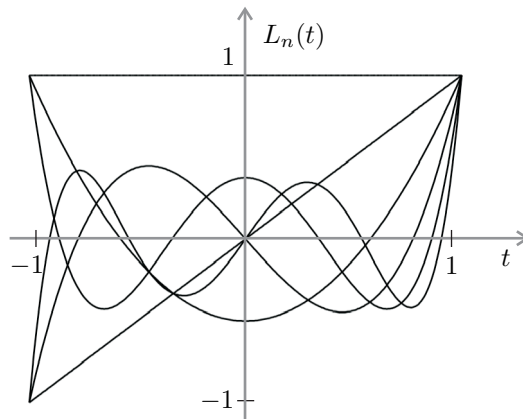
¹⁶Eden izmed možnih načinov je uporaba postopka Gramma in Schmidta, ki smo ga podali v razdelku 2.3.5.

¹⁷Tako računanje vrednosti polinomov imenujemo računanje z uporabo *“Hornerjeve sheme”*.

Tako za prvih šest Legendrovih polinomov dobimo:

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, \\ L_1(t) &= t, \\ L_2(t) &= \frac{3t^2 - 1}{2}, \\ L_3(t) &= \frac{5t^3 - 3t}{2}, \\ L_4(t) &= \frac{35t^4 - 30t^2 + 3}{8}, \\ L_5(t) &= \frac{63t^5 - 70t^3 + 15t}{8}. \end{aligned}$$

Njihov potek je predstavljen na sliki 2.18.



Slika 2.18: Prvih 6 Legendrovih polinomov na intervalu $(-1, 1)$

Več različnih družin zaporedij ortogonalnih polinomov lahko dobimo tako, da splošimo definicijo skalarnega produkta med signali na

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} w(t)x(t)\overline{y(t)}dt, \quad (2.51)$$

kjer je $w(t)$ na intervalu (t_1, t_2) pozitivna utežna funkcija:

$$w(t) > 0 \quad \text{za} \quad t_1 < t < t_2.$$

Utežna funkcija $w(t)$ v tem primeru določa tudi vektorski prostor signalov, nad katerimi je definiran skalarni produkt [13]. Tako na primer dobimo *Jacobijeve*, *Gegenbauerjeve*, *Chebysheve*, *Laguerreove* in *Hermitove polinome*. Legendrovi polinomi so poseben primer takih polinomov, ko je

$$w(t) = 1.$$

Za podrobnejši opis glej na primer [14].

2.4.4 Sinusne temeljne funkcije

Zaporedje sinusnih trigonometrijskih temeljnih funkcij

$$1, \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \sin 3\omega_0 t, \dots \quad (2.52)$$

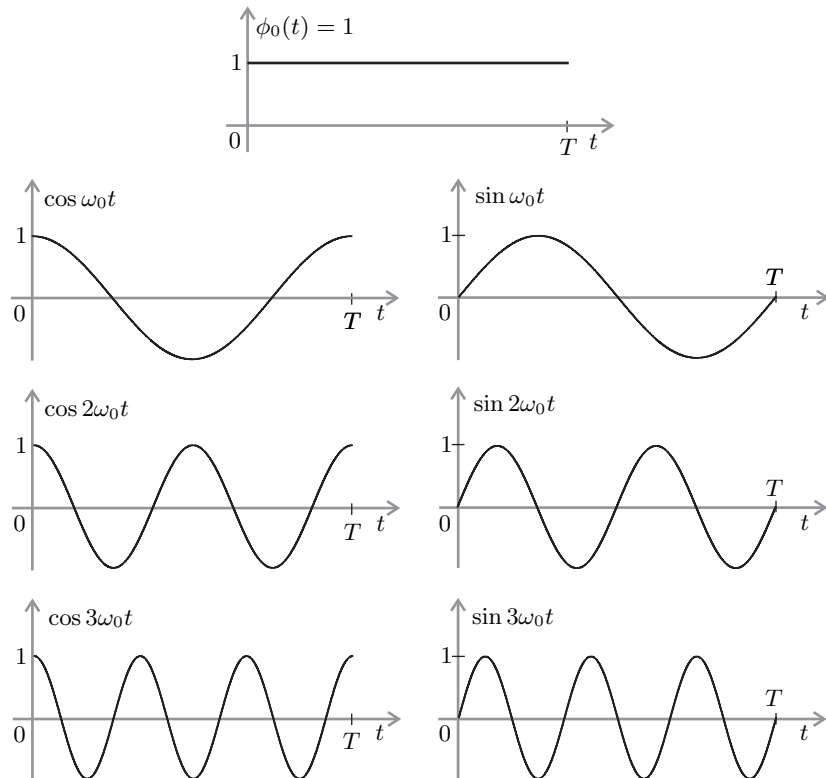
je polno zaporedje temeljnih funkcij (slika 2.19), ki je ortogonalno na vsakem končnem časovnem intervalu (t_1, t_2) pri pogoju, da krožno frekvenco ω_0 določimo z

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.53)$$

kjer je

$$T = t_2 - t_1.$$

Zaradi periodičnosti trigonometrijskih temeljnih funkcij, je pri določitvi področja ortogonalnosti pomembna le širina časovnega intervala T , na katerem določamo približek.



Slika 2.19: Prvih 7 ortogonalnih sinusnih temeljnih funkcij na intervalu $(0, T)$

Koeficienti K_i so za to zaporedje temeljnih funkcij enaki

$$K_i = \begin{cases} T, & i = 0 \\ \frac{T}{2}, & i > 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

Definicijo zgornjega zaporedja temeljnih funkcij lahko razširimo tako, da pridobimo polno zaporedje ortogonalnih kompleksnih funkcij $\{\phi_n(t)\}$, kjer je

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.55)$$

in

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.56)$$

V tem primeru za vse koeficiente K_n velja

$$K_n = T. \quad (2.57)$$

Ker je

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t,$$

tudi zaporedje $\{\phi_n(t)\}$ lahko razumemo kot zaporedje trigonometrijskih sinusnih funkcij.

Sinusne trigonometrijske funkcije so zvezne in poljubnokrat zvezno odvedljive funkcije. Zato ima tudi približek, določen z linearno kombinacijo končnega števila takih temeljnih funkcij, enake lastnosti. Še pomembnejša od "lepe" analitične lastnosti približka je v tem primeru interpretacija fizikalnega ozadja tako sestavljenega približka $\tilde{x}(t)$. Približek, zapisan z

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-k_s}^{k_z} C_n \phi_n(t) = \sum_{n=-k_s}^{k_z} C_n (\cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t),$$

lahko razumemo, kot da smo približek za signal $x(t)$ predstavili s končno vsoto sinusnih nihanj. Take predstavitve so za določanje specifičnih značilnosti in lastnosti signalov zelo pomembne. Z njimi se bomo podrobneje ukvarjali v naslednjih poglavjih.

2.4.5 Sprememba območja ortogonalnosti

Zaporedje temeljnih funkcij $\{\phi_i(t)\}$, ki so ortogonalne na končnem časovnem intervalu $t_1 < t < t_2$, lahko z linearno transformacijo neodvisne spremenljivke

$$t' = a(t - b) \quad (2.58)$$

spremenimo v zaporedje temeljnih funkcij

$$\{\phi'_i(t)\} = \{\phi_i(a(t - b))\},$$

ki je ortogonalno na drugem končnem časovnem intervalu

$$t_s < t < t_g .$$

Pri tem je potrebno za vrednosti parametrov a in b izbrati

$$a = \frac{t_2 - t_1}{t_g - t_s}, \quad b = t_s - \frac{t_1}{a} . \quad (2.59)$$

Izpeljava

$$\langle \phi'_i(t), \phi'_j(t) \rangle = \int_{t_s}^{t_g} \phi'_i(t) \overline{\phi'_j(t)} dt = \int_{t_s}^{t_g} \phi_i(a(t-b)) \overline{\phi_j(a(t-b))} dt .$$

Uvedemo novo integracijsko spremenljivko

$$t' = a(t-b) .$$

Ker je

$$\begin{aligned} a(t_s - b) &= \frac{t_2 - t_1}{t_g - t_s} (t_s - t_s + t_1 \frac{t_g - t_s}{t_2 - t_1}) = t_1 , \\ a(t_g - b) &= \frac{t_2 - t_1}{t_g - t_s} (t_g - t_s + t_1 \frac{t_g - t_s}{t_2 - t_1}) = t_2 - t_1 + t_1 = t_2 \end{aligned}$$

in

$$dt' = a dt ,$$

je

$$\langle \phi'_i(t), \phi'_j(t) \rangle = \frac{1}{a} \int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t') \overline{\phi_j(t')} dt' = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{a} K_i, & i = j . \end{cases}$$

Kot vidimo, se ortogonalnost ohranja. Če pa je $a \neq 1$, se spremenijo vrednosti koeficientov K_i

$$K'_i = \frac{1}{a} K_i . \quad (2.60)$$

Primer 2.6

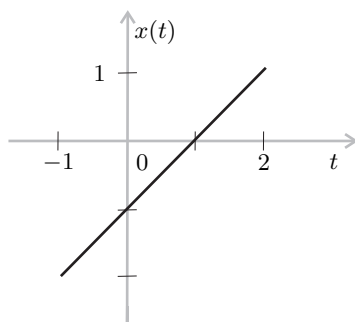
Za signal $x(t) = t - 1$ na intervalu $-1 \leq t \leq 2$ določimo približek $\tilde{x}(t)$ s prvimi tremi Haarovimi funkcijami v obliki

$$\tilde{x}(t) = C_0 h'_0(t) + C_1 h'_1(t) + C_2 h'_2(t)$$

tako, da bo srednja kvadratna napaka med približkom in signalom najmanjša. Določimo tudi velikost srednje kvadratne napake in podajmo skico približka $\tilde{x}(t)$.

Rešitev

Potek signala $x(t)$ je podan na sliki 2.20. Haarove temeljne funkcije podane na

Slika 2.20: Signal $x(t)$

sliki 2.14 na strani 44 so definirane na časovnem intervalu $(0, 1)$. Definijsko območje signala na katerem želimo določiti približek pa je časovni interval $(-1, 2)$. V skladu z enačbami 2.59 določimo potek Haarovih funkcij, ki bodo ortogonalne na tem intervalu

$$a = \frac{t_2 - t_1}{t_g - t_s} = \frac{(1 - 0)}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

$$b = t_s - \frac{t_1}{a} = -1 - 0 = -1$$

$$h'_i(t) = h_i(a(t - b)) = h_i\left(\frac{1}{3}(t + 1)\right) \quad .$$

Ker je vrednost parametra a različna od 1, določimo po 2.60 tudi nove vrednosti koeficientov K'_i

$$K'_i = \frac{1}{a}K_i = 3K_i$$

$$K'_0 = K'_1 = 3, \quad K'_2 = \frac{3}{2} \quad .$$

Prve tri transformirane temeljne funkcije so podane na sliki 2.21. Izračunajmo vrednosti koeficientov približka $\tilde{x}(t)$:

$$C_0 = \frac{1}{K'_0} \int_{t_s}^{t_g} h'_0(t)x(t)dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 1(t-1)dt = -\frac{1}{2}$$

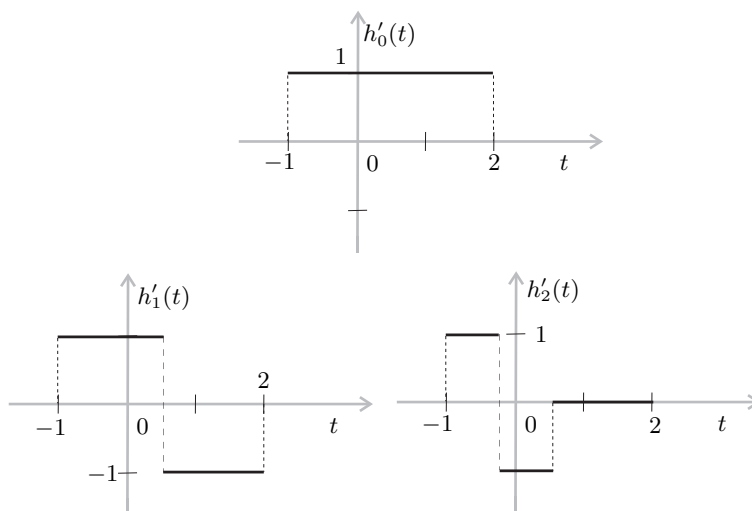
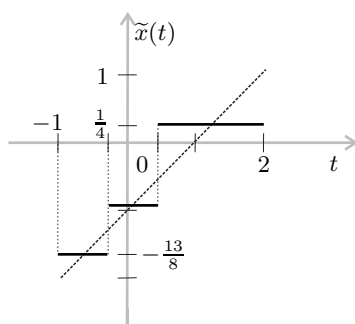
$$C_1 = \frac{1}{K'_1} \int_{t_s}^{t_g} h'_1(t)x(t)dt = \frac{1}{3} \left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} 1(t-1)dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 -1(t-1)dt \right) = -\frac{3}{4}$$

$$C_2 = \frac{1}{K'_2} \int_{t_s}^{t_g} h'_2(t)x(t)dt = \frac{2}{3} \left(\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} 1(t-1)dt + \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} -1(t-1)dt \right) = -\frac{3}{8}$$

Zdaj lahko tudi narišemo skico približka $\tilde{x}(t)$ (Slika 2.22)

$$\tilde{x}(t) = -\frac{1}{2}h'_0(t) - \frac{3}{4}h'_1(t) - \frac{3}{8}h'_2(t)$$

in izračunamo vrednost srednje kvadratne napake $\overset{\dots\dots}{\varepsilon^2(t)}$.

Slika 2.21: Prve tri Haarove ortogonalne na intervalu $(-1, 2)$ Slika 2.22: Potek približka $\tilde{x}(t)$ na intervalu $(-1, 2)$

$$\begin{aligned}
 \dots\dots &= \frac{1}{(t_g - t_s)} \left(\int_{t_s}^{t_g} x^2(t) dt - \left(K'_0 C_0^2 + K'_1 C_1^2 + K'_2 C_2^2 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\int_{-1}^2 (t-1)^2 dt - \left(3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^2 \right) \right) \\
 &= \frac{1}{3} (3 - (2, 65)) = 0,12 \quad .
 \end{aligned}$$

2.4.6 Razširitev uporabe temeljnih funkcij na neomejene časovne intervale

Izražanje signalov s temeljnimi funkcijami lahko razširimo na časovno neomejene intervale, tako da posplošimo definicijo skalarnega produkta kot v (2.51)

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b w(t)x(t)\overline{y(t)}dt ,$$

kjer je $w(t)$ ustrežna utežna funkcija. Izbira [13]

$$w(t) = t^\sigma e^{-t} , \text{ kjer je } \sigma > -1 ,$$

določa vektorski prostor signalov

$$x(t) \in L_{w(0,+\infty)}^2$$

z lastnostjo

$$\int_0^{+\infty} w(t)|x(t)|^2 dt < \infty .$$

Ustrežno zaporedje ortogonalnih polinomov pri tako definiranem skalarnem produktu imenujemo *Laguerrovi polinomi* $\{L_n(t)\}$, ki v tem prostoru tvorijo polno ortogonalno zaporedje temeljnih funkcij.

Utežna funkcija [13]

$$w(t) = e^{-t^2}$$

določa vektorski prostor signalov

$$x(t) \in L_{w(-\infty,+\infty)}^2$$

z lastnostjo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(t)|x(t)|^2 dt < \infty .$$

Pripadajoče zaporedje ortogonalnih polinomov pri tako definiranem skalarnem produktu imenujemo *Hermitovi polinomi* $\{H_n(t)\}$, ki v tem prostoru tvorijo polno ortogonalno zaporedje temeljnih funkcij¹⁸.

Iz ortogonalnih polinomov $\{p_n(t)\}$, definiranih v vektorskih prostorih $L_{w(a,b)}^2$, pridobimo zaporedje temeljnih ortogonalnih funkcij $\{\psi_n(t)\}$ v vektorskem prostoru $L_{(a,b)}^2$ s transformacijo [13]

$$\psi_n(t) = \sqrt{w(t)}p_n(t) .$$

Tako na primer v prostoru $L_{(-\infty,+\infty)}^2$ pridobimo polno zaporedje ortogonalnih temeljnih funkcij $\{\psi_n(t)\}$, kjer je

$$\psi_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t) .$$

¹⁸Izrazi za eksplicitno določanje *Laguerrovih* in *Hermitovih* polinomov in njihovi poteki so podani v [14].

Literatura

- [1] G. Tomšič, N. Mramor Kosta, B. Orel : 1.4.1 Vektorski prostori, *Matematika II*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2005, str. 59–60.
- [2] L. Gyergyek: *Teorija signalov in obdelava signalov*, ZAFER, 1991.
- [3] G. Tomšič, B. Orel, N. Mramor Kosta: 2.1.3 Monotona zaporedja, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2004, str. 43–44.
- [4] G. Tomšič, B. Orel, N. Mramor Kosta: 2.1.2 Konvergentna zaporedja, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2004, str. 35–42.
- [5] I.N. Bronštejn in dr.: 7.2.4.1 Vsote nekaterih vrst s konstantnimi členi, *Matematični priročnik*, Tehniška založba Slovenije, 1996, str. 298–299.
- [6] J. L. Walsh: A Closed Set of Normal Orthogonal Functions, *American J. Math.*, Vol. 55, 1923, str. 5–24.
- [7] N. A. Alexandridis, A. Klinger: Real–Time Walsh–Hadamard Transformation, *IEEE Transactions on Computers*, marec, 1972, str. 288–292.
- [8] W. K. Pratt, J. Kane, H. C. Andrews: Hadamard Transform Image Coding, *Proceedings of the IEEE*, Vol. 57, št. 1, januar 1969, str. 58–68.
- [9] A. Haar: Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme, *Math. Annal.* 69, 1910, str. 331–371.
- [10] L. Gyergyek, M. Vezjak, S. Ribarić, K. Turkulin, N. Pavešič, V. Valenčič: Pregled dejavnosti skupine Fakultete za elektrotehniko v Ljubljani na področju analize in razpoznavanja signalov EKG. *Elektrotehniški vesnik*, Vol. 45, št. 5, 1978, str. 197–199.
- [11] A. Cohen, R. D. Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman&Hall, London, 1995.
- [12] F. Auger in drugi: *Time-frequency toolbox for use with MATLAB*, Tutorial, 1997.
- [13] F. Križanič: Linearni diferencialni operatorji, *Linearna algebra in linearna analiza*, Mladinska knjiga, 1969, str. 279–341.
- [14] M. Abramowitz, I. A. Stegun: Orthogonal Polynomials, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, INC., New York, 1970, str. 773–802.

3. Frekvenčna predstavitev periodičnih signalov

V prejšnjem poglavju smo govorili o izražavi signalov s temeljnimi funkcijami na končnem časovnem intervalu. Razširimo način razmišljanja tako, da bi lahko izrazili s temeljnimi funkcijami tudi signale na celi časovni osi. Ena izmed možnosti je, da izražavo posplošimo na periodične signale, to je na signale, ki za nek neničelni T_0 in za vsak t izpolnjujejo zahtevo

$$f(t) = f(t + T_0) .$$

3.1 Izražava periodičnih signalov s periodičnimi temeljnimi funkcijami - Fourierova vrsta

Naj bo $f(t)$ periodičen signal z osnovno periodo T_0 . Izberimo trigonometrijsko zaporedje kompleksnih temeljnih funkcij $\{\phi_n(t)\}$ iz razdelka 2.4.4,

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t} ,$$

in prilagodimo njihovo območje ortogonalnosti, tako da bodo ortogonalne na intervalu dolžine osnovne periode T_0 signala $f(t)$.

Krožno frekvenco

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} . \tag{3.1}$$

v tem primeru imenujemo tudi *osnovna frekvenca* oziroma *osnovna harmonska frekvenca*.

Tako določene temeljne funkcije, s katerimi lahko izrazimo signal $f(t)$ na intervalu ene periode, so tudi periodične s periodo T_0 :

$$\phi_n(t + T_0) = e^{jn\omega_0(t+T_0)} = e^{jn\omega_0 t} e^{jn\frac{2\pi}{T_0}T_0} = e^{jn\omega_0 t} e^{jn2\pi} = \phi_n(t) .$$

Ker so tako signal $f(t)$ kot tudi vse temeljne funkcije $\phi_n(t)$ periodični z enako periodo, signala $f(t)$ s tako izbranimi temeljnimi funkcijami ne izrazimo le na območju ene periode, temveč na celi časovni osi.

Splošne oznake za koeficiente C_n , ki smo jih pri izražavi signalov uporabljali v poglavju 2, zamenjajmo s $F(n)$, kot je to običajno pri opisovanju periodičnih signalov, in zapišimo izražavo periodičnega signala z vsemi temeljnimi funkcijami:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \phi_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t} .$$

Vrsto

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t} \quad (3.2)$$

imenujemo Fourierova¹ vrsta oziroma bolj natančno *kompleksna Fourierova vrsta* signala $f(t)$. Vrednosti koeficientov $F(n)$ določimo po pravilu (2.37):

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt . \quad (3.3)$$

Ker so tako signal $f(t)$ in temeljne funkcije $e^{-jn\omega_0 t}$ periodične funkcije s periodo T_0 , izbira spodnje meje t_1 integrala (3.3) ne vpliva na vrednost $F(n)$ in je zato poljubna.

3.1.1 Konvergenca Fourierove vrste

Ker smo pri izražavi (3.2) upoštevali vse funkcije iz polnega zaporedja temeljnih funkcij, je vrednost srednje kvadratne napake take izražave enaka 0. Težave bi lahko nastopile le v primeru, ko vrednosti koeficientov $F(n)$ ne bi mogli določiti ali če Fourierova vrsta ne bi bila konvergentna. Izkaže se, da je konvergenca Fourierove vrste zagotovljena, če periodični signal izpolnjuje naslednje *Dirichletove pogoje*²:

1. Signal $f(t)$ mora biti na intervalu ene periode absolutno integrabilen:

$$\int_{t_1}^{t_1+T_0} |f(t)| dt = A < \infty .$$

2. Signal $f(t)$ sme imeti na intervalu ene periode kvečjemu končno število nezveznosti.
3. Signal $f(t)$ sme imeti na intervalu ene periode kvečjemu končno število lokalnih minimumov in maksimumov.

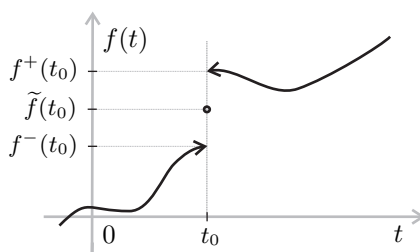
¹Baptist Joseph, Baron de Fourier (1768 – 1830) je bil francoski matematik, ki je v razpravi "Theorie analytique de la chaleur" (Analitična teorija o toploti), predstavljeni leta 1811 na Francoski akademiji znanosti in objavljeni leta 1822, prvi uporabil zapis funkcije, izražene z vrsto, ki jo sestavljajo sinusna nihanja.

²Nemški matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet je v svoji razpravi v *Crelle's Journal* leta 1828 prvi objavil temeljno kritično razpravo o konvergenci Fourierovih vrst, o kateri so pred tem pisali že Poisson in Cauchy. Zato ga smatramo za ustanovitelja *Teorije Fourierovih vrst* [1].

- Za signal $f(t)$, ki izpolnjuje zgornje pogoje³, velja, da je za vsak t vrednost Fourierove vrste $\tilde{f}(t)$ enaka srednji vrednosti leve in desne limite signala $f(t)$ (slika 3.1):

$$\tilde{f}(t) = \frac{f^+(t) + f^-(t)}{2}. \quad (3.4)$$

Če signal izpolnjuje drugi Dirichletov pogoj, to pomeni, da je $f(t)$ odsekoma zvezna funkcija in zato leva in desna limita vrednosti signala obstajata za vsak t .



Slika 3.1: Vrednost Fourierove vrste ob času t_0 , kjer signal $f(t)$ ni zvezna funkcija.

Kjer je signal $f(t)$ zvezna funkcija, je [3]

$$f^+(t) = f^-(t)$$

in zato

$$\tilde{f}(t) = \frac{f^+(t) + f^-(t)}{2} = f(t).$$

Za vse t , kjer je periodični signal $f(t)$ zvezna funkcija, je vrednost Fourierove vrste $\tilde{f}(t)$ kar enaka vrednosti signala $f(t)$:

$$\tilde{f}(t) = f(t). \quad (3.5)$$

Komentar

Dirichletovi pogoji so zadostni za konvergenco Fourierove vrste. Neizpolnjevanje prvega pogoja ima lahko za posledico, da vrednosti koeficientov $F(n)$ ne bodo omejene. Kakšni pa bi bili matematični modeli signalov, ki ne bi izpolnjevali drugega ali tretjega pogoja?

Vzemimo, da signal $f(t)$ ne bi izpolnjeval drugega pogoja. V tem primeru bi imel signal $f(t)$ na območju ene periode neomejeno število nezveznosti. Označimo časovne trenutke, kjer signal ni zvezen, s t_i . Množica $\{t_i\}$ tvori omejeno neskončno zaporedje, saj je

$$t_1 \leq t_i < t_1 + T_0 \quad \text{za vsak } i.$$

Eden izmed osnovnih izrekov matematične analize ugotavlja, da ima vsako omejeno neskončno zaporedje vsaj eno stekališče [4]. Torej imajo v tem primeru nezveznosti

³Dokaz lahko bralec najde v [2].

signala $f(t)$ vsaj eno stekališče. Enako razmišljanje bi lahko uporabili za tretji Dirichletov pogoj.

Za signale, katerih nezveznosti ali minimumi in maksimumi se v poljubno ozki okolici nekaterih časovnih trenutkov (stekališč) pojavljajo v neomejenem številu, ne moremo zagotoviti izražave s trigonometrijskimi temeljnimi funkcijami.

Dirichletovi pogoji nas pri zapisu signalov s Fourierovo vrsto posebej ne omejujejo, saj nam zagotavljajo konvergenco vrste za obsežno množico periodičnih signalov. Realno fizikalnih signalov, ki bi jih želeli opisovati z matematičnimi modeli periodičnih funkcij, in ne izpolnjujejo drugega in tretjega Dirichletovega pogoja, praktično ni.

3.1.2 Fourierova vrsta realnih periodičnih signalov

Dirichletovi pogoji in vsa prejšnja izvajanja veljajo v splošnem za kompleksne periodične signale. V tem razdelku se omejimo le na realne periodične signale

$$f(t) \in \mathbb{R} .$$

Določimo vrednost $\overline{F(n)}$:

$$\begin{aligned} \overline{F(n)} &= \overline{\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt} = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \overline{e^{-jn\omega_0 t}} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt = F(-n) . \end{aligned}$$

Dobljena zveza

$$F(-n) = \overline{F(n)} \quad (3.6)$$

omogoča, da vrednosti koeficientov pri negativnih vrednostih indeksa n izrazimo z vrednostmi koeficientov pri pozitivnih n . Izraz za Fourierovo vrsto (3.2) razširimo z

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t$$

in upoštevajmo (3.6). Ker je $\cos n\omega_0 t$ soda, $\sin n\omega_0 t$ pa liha funkcija n -ja, dobimo:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(F(n) \cos n\omega_0 t + j F(n) \sin n\omega_0 t \right) \\ &= F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(F(n) + \overline{F(n)} \right) \cos n\omega_0 t + j \left(F(n) - \overline{F(n)} \right) \sin n\omega_0 t \right) . \end{aligned}$$

Izraza $\left(F(n) + \overline{F(n)} \right)$ in $j \left(F(n) - \overline{F(n)} \right)$ sta realna. Označimo

$$a_n = \left(F(n) + \overline{F(n)} \right) \in \mathbb{R} , \quad b_n = j \left(F(n) - \overline{F(n)} \right) \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

in dobimo

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) . \quad (3.8)$$

Izraz (3.8) imenujemo *realna Fourierova vrsta*⁴. Za realne signale torej lahko Fourierovo vrsto izrazimo tako, da jo sestavljajo samo realni členi. Poleg tega se pri seštevanju omejimo le na nenegativne vrednosti indeksa n .

Do enakega zapisa bi prišli tudi, če bi realni periodični signal $f(t)$ izrazili direktno z zaporedjem realnih trigonometrijskih funkcij⁵

$$\{1, \cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \cos 3\omega_0 t, \dots\} ,$$

ki za realne signale prav tako tvorijo polno zaporedje ortogonalnih temeljnih funkcij. Po (2.37) dobimo:

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt , \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt . \quad (3.9)$$

Iz vrednosti koeficientov a_n in b_n lahko prav tako pridobimo vrednosti koeficientov $F(n)$ kompleksne Fourierove vrste

$$F(n) = \frac{a_n - jb_n}{2} . \quad (3.10)$$

Ker so vrednosti a_n in b_n določene le za nenegativne n , vrednosti $F(n)$ za negativne n določimo iz (3.6)

$$F(n) = \overline{F(-n)} \quad n < 0 .$$

Zapisa kompleksne in realne Fourierove vrste sta ekvivalentna. Izkaže pa se, da je za predstavitev frekvenčnih lastnosti periodičnega signala $f(t)$ primernejši zapis s kompleksno Fourierovo vrsto. Ker je s kompleksno Fourierovo vrsto mogoče izraziti tudi večino kompleksnih periodičnih signalov⁶, je tak zapis tudi splošnejši.

3.1.3 Kompleksni spekter periodičnih signalov

Kompleksno Fourierovo vrsto lahko razumemo kot zapis poljubnega⁷ periodičnega signala s kompleksnimi trigonometrijskimi funkcijami $\phi_n(t)$, kjer je

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t .$$

S fizikalnega stališča lahko funkcijo $\phi_n(t)$ interpretiramo kot matematični model kompleksnega sinusnega nihanja s frekvenco $n\omega_0$. Sinusno nihanje predstavlja osnovni model nihanja, ki ga zasledimo v naravi. Z njim lahko na primer opišemo nihanje *matematičnega nihala* ali nihanje, ki ga dosežemo z električnim vezjem *nihajnega kroga*.

⁴V taki obliki je vrsto zapisal B. J. Fourier.

⁵Glej razdelek 2.4.4.

⁶Na primer takšnih, ki zadoščajo Dirichletovim pogojem.

⁷Takega, da je zanj Fourierova vrsta konvergentna. Glej razdelek 3.1.1.

- Zapis periodičnega signala s Fourierovo vrsto torej lahko razumemo kot zapis oziroma predstavitev signala z neskončno vsoto sinusnih nihanj s frekvencami $n\omega_0$. Govorimo o *frekvenčni* oziroma *spektralni* predstavitvi periodičnega signala.

V kolikšni meri je posamezno sinusno nihanje s frekvenco $n\omega_0$ zastopano v signalu $f(t)$, je odvisno prav od vrednosti koeficienta $F(n)$, s katerim sinusno nihanje $\phi_n(t)$ v izrazu za Fourierovo vrsto pomnožimo. Z vrednostmi koeficientov $F(n)$ je torej frekvenčna predstavitev periodičnega signala $f(t)$ natanko določena. Postopek je reverzibilen – iz vrednosti $F(n)$ lahko pridobimo potek periodičnega signala v odvisnosti od časa t . Ekvivalentnost med časovno in frekvenčno (spektralno) predstavitvijo, ki je utemeljena s Fourierovo vrsto, velikokrat zapišemo kot

$$f(t) \longleftrightarrow F(n) .$$

- Koeficiente $F(n)$ imenujemo *kompleksni spekter* periodičnega signala $f(t)$.

Indeks n nam pri tem pove, za katero frekvenco $\omega = n\omega_0$ sinusnega nihanja $\phi_n(t)$ gre.

Spekter $F(n)$ imenujemo *kompleksni*, ker so njegove vrednosti zaradi (3.3) v splošnem kompleksne. Kompleksni spekter lahko z realnimi spektri predstavimo v kartezični ali polarni obliki.

Kartezični zapis:

$$F(n) = C(n) + jD(n) .$$

Pri tem sta spektra $C(n)$ in $D(n)$ realni funkciji indeksa n , kjer

$C(n)$ imenujemo *realni spekter*,
 $D(n)$ pa *imaginarni spekter* signala $f(t)$.

Polarni zapis:

$$F(n) = |F(n)|e^{j\Theta(n)} .$$

Pri tem sta spektra $|F(n)|$ in $\Theta(n)$ realni funkciji indeksa n , kjer

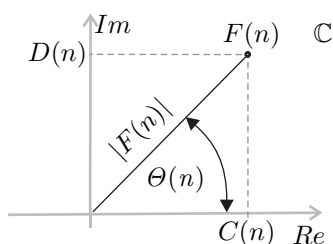
$|F(n)|$ imenujemo *amplitudni spekter*,
 $\Theta(n)$ pa *fazni spekter* signala $f(t)$.

Vrednost kompleksnega spektra $F(n)$ je kompleksno število in jo lahko predstavimo kot točko v kompleksni ravnini \mathbb{C} (glej sliko 3.2). Lego točke lahko podamo s pripadajočima odsekom na realni in imaginarni osi, to je s $C(n)$ in $D(n)$, ali pa z njeno oddaljenostjo od izhodišča $|F(n)|$ in faznim kotom $\Theta(n)$. Fazni kot $\Theta(n)$ pri tem definiramo kot kót med pozitivno realno osjo in zveznico med koordinatnim izhodiščem in točko $F(n)$. S kartezičnega zapisa lahko vedno preidemo v polarni zapis in obratno kot je to podano v naslednjih zvezah:

$$|F(n)| = +\sqrt{C(n)^2 + D(n)^2} = +\sqrt{F(n) \cdot \overline{F(n)}}, \quad (3.11)$$

$$\theta(n) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{D(n)}{C(n)}, & C(n) > 0 \\ \pm\pi + \operatorname{arctg} \frac{D(n)}{C(n)}, & C(n) < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

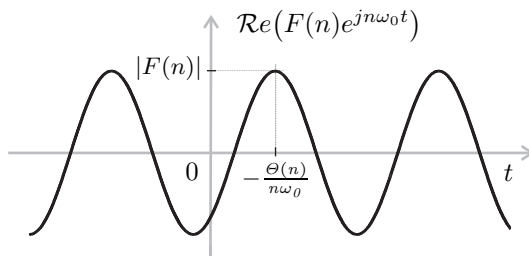
$$\begin{aligned} C(n) &= |F(n)| \cdot \cos \theta(n), \\ D(n) &= |F(n)| \cdot \sin \theta(n). \end{aligned}$$



Slika 3.2: Določitev lege $F(n)$ v kompleksni ravnini \mathbb{C}

Spekter $F(n)$ največkrat določimo v kartezični obliki s spektroma $C(n)$ in $D(n)$. S stališča interpretacije frekvenčnih lastnosti signalov pa je pomembnejša predstavitev v polarni obliki. To je s spektroma $|F(n)|$ in $\theta(n)$.

Amplitudni spekter $|F(n)|$ tako podaja amplitudo sinusnega nihanja $e^{jn\omega_0 t}$ pri frekvenci $n\omega_0$, ki je vsebovano v signalu $f(t)$, fazni spekter $\theta(n)$ pa njegov fazni zamik (slika 3.3).



Slika 3.3: Realni del sinusnega nihanja s frekvenco $n\omega_0$, amplitudo $|F(n)|$ in fazo $\theta(n)$

3.1.4 Spektri realnih periodičnih signalov

Zopet vzemimo, da je periodični signal $f(t)$ realen:

$$f(t) \in \mathbb{R} .$$

Realne periodične signale, ki izpolnjujejo Dirichletove pogoje, lahko izrazimo tudi z realno Fourierovo vrsto, tako da po (3.9) določimo koeficiente a_n in b_n . Ker so vrednosti a_n in b_n ter $F(n)$ ene z drugimi natanko določene, lahko z uporabo relacije (3.10) vrednosti amplitudnega $|F(n)|$ in faznega spektra $\Theta(n)$ za $n \geq 0$ določimo tudi iz vrednosti a_n in b_n :

$$|F(n)| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} , \quad (3.13)$$

$$\Theta(n) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} , & a_n > 0 \\ \pm\pi - \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} , & a_n < 0 . \end{cases} \quad (3.14)$$

Iz razširjenega zapisa izraza (3.3)

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

sledi, da je

$$C(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt , \quad (3.15)$$

$$D(n) = -\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt . \quad (3.16)$$

Ker za realne periodične signale $f(t)$ velja zveza (3.6)

$$F(-n) = \overline{F(n)} ,$$

kar lahko v razširjeni obliki zapišemo kot

$$C(-n) + jD(-n) = C(n) - jD(n) ,$$

to pomeni, da je realni spekter $C(n)$ soda funkcija, imaginarni spekter $D(n)$ pa liha funkcija frekvence $n\omega_0$:

$$C(n) = C(-n) , \quad (3.17)$$

$$D(n) = -D(-n) . \quad (3.18)$$

Iz zvez (3.11) in (3.12) izpeljemo, da je amplitudni spekter $|F(n)|$ soda funkcija, fazni spekter $\Theta(n)$ pa liha funkcija frekvence $n\omega_0$:

$$|F(n)| = |F(-n)| , \quad (3.19)$$

$$\Theta(n) = -\Theta(-n) . \quad (3.20)$$

- Simetrije (3.17), (3.18), (3.19) in (3.20) povedo, da je spektralna predstavitev realnih periodičnih signalov s svojim potekom za nenegativne frekvence povsem določena. Spektralna vsebina signala pri negativnih frekvencah je le zrcalna slika dogajanja na pozitivnem delu frekvenčne osi.

Naj bo realni periodični signal $f(t)$ tudi soda funkcija:

$$f(t) = f(-t) .$$

Produkt $f(t) \cdot \sin n\omega_0 t$ je tedaj liha funkcija in zaradi

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f(t) \sin n\omega_0 t dt = 0$$

sledi $D(n) = 0$. V tem primeru velja:

$$\begin{aligned} F(n) &= C(n) \in \mathbb{R} , \\ F(n) &= F(-n) . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Za koeficiente realne Fourierove vrste pa podobno

$$b_n = 0 . \tag{3.22}$$

Podobno velja, če je $f(t)$ realna periodična liha funkcija:

$$f(t) = -f(-t) .$$

V tem primeru je produkt $f(t) \cdot \cos n\omega_0 t$ liha funkcija in zaradi

$$\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t dt = 0$$

sledi $C(n) = 0$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned} F(n) &= j D(n) \in \mathbb{I} , \\ F(n) &= -F(-n) . \end{aligned} \tag{3.23}$$

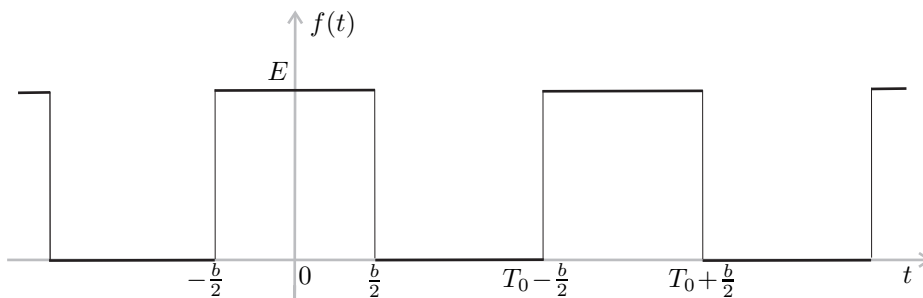
Za koeficiente realne Fourierove vrste sledi

$$a_n = 0 . \tag{3.24}$$

Primer 3.1

Spodaj podani realni periodični signal $f(t)$ (slika 3.4) izrazimo z realno Fourierovo vrsto.

$$f(t) = \begin{cases} E & , \quad -\frac{b}{2} \leq t < +\frac{b}{2} \\ 0 & , \quad +\frac{b}{2} \leq t < T_0 - \frac{b}{2} \\ f(t + nT_0) = f(t) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} \end{cases} .$$

Slika 3.4: Periodični signal $f(t)$

V posebnem primeru, ko je $T_0 = 2b$, določimo tudi vrednost Fourierove vrste pri $t = \frac{b}{2}$, kjer signal $f(t)$ ni zvezna funkcija.

Rešitev

Realna Fourierova vrsta (3.8) je določena z vrednostmi koeficientov a_n in b_n .

Signal $f(t)$ je soda funkcija⁸:

$$f(t) = f(-t).$$

Zaradi tega so po (3.22) vsi koeficienti

$$b_n = 0.$$

Določiti je potrebno le vrednosti koeficientov a_n . Če za spodnjo mejo integrala izberemo $t_1 = -\frac{b}{2}$, po (3.9) dobimo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{T_0 - \frac{b}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} E \cos n\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{2E}{T_0} \frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} = \frac{4E}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{n\omega_0} \\ &= \frac{2Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Iz (3.25) za $n = 0$ dobimo

$$a_0 = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} = \frac{2Eb}{T_0} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} = \frac{2Eb}{T_0}.$$

Realna Fourierova vrsta signala $f(t)$ je zato

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t = \frac{Eb}{T_0} + \frac{2Eb}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} \cos n\omega_0 t,$$

⁸ $f(t)$ je v resnici "skoraj" soda. V točkah, kjer ni zvezna, pravilo sodosti ni izpolnjeno. Ker sta na območju ene periode le dve nezveznosti, to ne vpliva na vrednosti koeficientov Fourierove vrste.

kjer je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Vzemimo, da je $T_0 = 2b$. Tedaj velja:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{\pi}{b}, \\ a_n &= E \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \quad \text{in} \\ \tilde{f}(t) &= \frac{E}{2} + E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n \frac{\pi}{b} t.\end{aligned}$$

Za $t = \frac{b}{2}$ dobimo:

$$\tilde{f}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

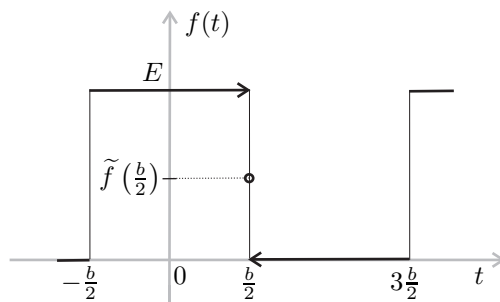
Ker je vrednost vseh produktov

$$\sin \frac{n\pi}{2} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} = 0 \quad \text{za vsak } n,$$

je

$$\tilde{f}\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{E}{2}.$$

Pri času $t = \frac{b}{2}$ signal $f(t)$ ni zvezen (slika 3.5). Kot izhaja iz Dirichletovih pogojev⁹, Fourierova vrsta v takih primerih konvergira k srednji vrednosti leve in desne limite signala ob času nezveznosti (3.4)



Slika 3.5: Del periodičnega signala $f(t)$, kjer pri $t = \frac{b}{2}$ signal ni zvezna funkcija, in označena vrednost Fourierove vrste $\tilde{f}\left(\frac{b}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}f^+\left(\frac{b}{2}\right) &= 0, \\ f^-\left(\frac{b}{2}\right) &= E \quad \text{in} \\ \tilde{f}\left(\frac{b}{2}\right) &= \frac{E+0}{2} = \frac{E}{2}.\end{aligned}$$

⁹Glej razdelek 3.1.1.

Primer 3.2

Za periodični signal $f(t)$ iz prejšnjega primera 3.1 določimo njegov kompleksni, amplitudni in fazni spekter v posebnem primeru, ko je

$$T_0 = 2b.$$

Skicirajmo tudi njihov potek.

Rešitev

V prejšnjem primeru smo za signal $f(t)$ določili koeficiente realne Fourierove vrste a_n in b_n :

$$a_n = E \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}, \quad b_n = 0.$$

Za realne periodične signale velja zveza (3.10) in zato za $n \geq 0$

$$F(n) = C(n) = \frac{a_n}{2} = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}.$$

Ker je za realne signale po (3.17)

$$C(-n) = C(n),$$

za vse n velja

$$F(n) = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \frac{E}{\pi n}, & n = 2k - 1 \\ \frac{E}{2}, & n = 0 \\ 0, & n = 2k, \quad k \neq 0. \end{cases}$$

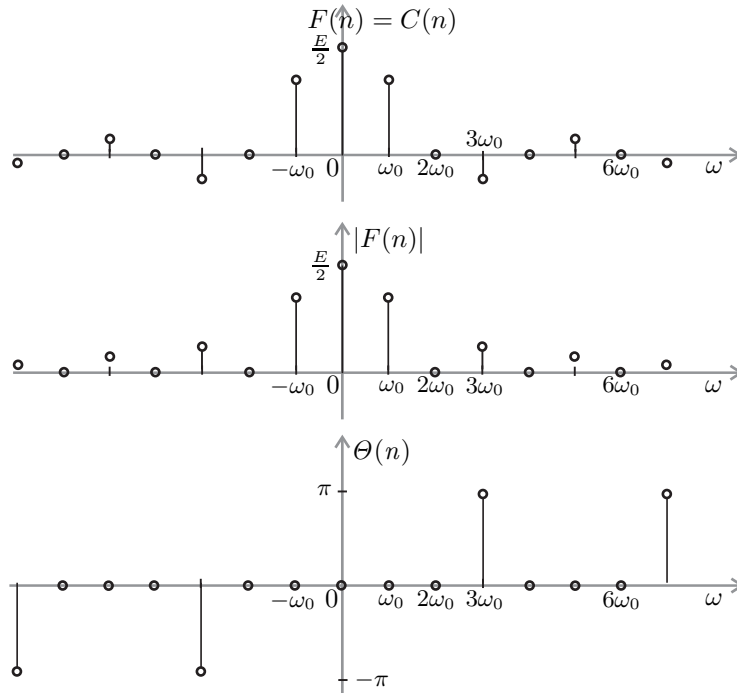
Amplitudni spekter $|F(n)|$ je kar

$$|F(n)| = |C(n)| = \frac{E}{2} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right| = \begin{cases} \frac{E}{\pi |n|}, & n = 2k - 1 \\ \frac{E}{2}, & n = 0 \\ 0, & n = 2k, \quad k \neq 0. \end{cases}$$

Ker je imaginarni del spektra $D(n) = 0$, je po (3.12) fazni spekter v odvisnosti od predznaka $C(n)$ enak

$$\Theta(n) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \quad \sin \frac{n\pi}{2} \geq 0 \\ \pi, & n \geq 0 \quad \sin \frac{n\pi}{2} < 0 \\ -\pi, & n < 0 \quad \sin \frac{n\pi}{2} > 0 \\ 0, & n < 0 \quad \sin \frac{n\pi}{2} \leq 0. \end{cases}$$

Fazna kota π in $-\pi$ ob enaki vrednosti amplitude določata isto vrednost kom-



Slika 3.6: Kompleksni spekter $F(n)$, amplitudni spekter $|F(n)|$ in fazni spekter $\Theta(n)$ signala $f(t)$

pleksnega števila. Predznak smo pri od nič različnih vrednostih faznega spektra za negativne frekvence spremenili zato, da smo formalno zagotovili (3.20), da je $\Theta(n)$ liha funkcija. Slika 3.6 prikazuje zgoraj določene spektre.

Komentar

Vrednosti spektrov so določene le za posamezne frekvence ω , ki so enake celemu mnogokratniku osnovne frekvence ω_0 :

$$\omega = n\omega_0 .$$

- Pravimo, da so spektri periodičnih signalov *diskretni* oziroma – glede na njihovo grafično predstavitev – *črtasti* (slika 3.6).

Literatura

- [1] H. Koch: Gustav Peter Lejeune Dirichlet, *Mathematics in Berlin* (Berlin, 1998), str. 33-40. Glej tudi <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Dirichlet.html>
- [2] G. P. Tolstov: 3. Convergence of Trigonometric Fourier series, *Fourier Series*, Dover Publications, Inc., New York, 1976, str. 66 –94.
- [3] G. Tomšič, B. Orel, N. M. Kosta: 3.2 Zvezne funkcije, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2004, str. 73–90.
- [4] G. Tomšič, B. Orel, N. M. Kosta: 2. Zaporedja in številske vrste, *Matematika I*, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2004, str. 31–59.

4. Korelacija in konvolucija periodičnih signalov

4.1 Korelacija periodičnih signalov

Korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ periodičnih signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ z enako periodo T_0 je določena z izrazom

$$\varphi_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt . \quad (4.1)$$

Če sta periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ močnostna, $\varphi_{ij}(\tau)$ obstaja za vsak realen časovni zamik τ in jo prav tako lahko opredelimo kot signal.

Izkaže se, da je zaradi posebnih lastnosti, ko je

$$f_i(t) = f_j(t) ,$$

smiselno ločevati med dvema možnostima:

- če je $f_i(t) \neq f_j(t)$, korelacijo $\varphi_{ij}(\tau)$ imenujemo *križna korelacija*,
- če pa je $f_i(t) = f_j(t)$, korelacijo $\varphi_{ii}(\tau)$ imenujemo *avtokorelacija*.

4.1.1 Lastnosti korelacije

4.1.1.1 Zapis s skalarnim produktom

Vsi močnostni periodični signali z enako periodo tvorijo vektorski prostor, saj je vsota dveh takih signalov zopet periodični signal z enako periodo in je produkt močnostnega periodičnega signala s skalarjem (kompleksno ali realno konstanto) tudi močnostni periodični signal. Podobno, kot smo o tem že govorili v 2. poglavju, tudi za ta vektorski prostor velja, da lahko v njem definiramo skalarni produkt:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt . \quad (4.2)$$

Iz zveze (4.2) in definicije korelacije (4.1) sledi, da lahko korelacijo periodičnih signalov predstavimo tudi kot skalarni produkt:

$$\varphi_{ij}(\tau) = \langle f_j(t + \tau), f_i(t) \rangle. \quad (4.3)$$

4.1.1.2 Neodvisnost od izbire spodnje meje t_1

Korelacija je neodvisna od izbire spodnje meje t_i :

$$\varphi_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt. \quad (4.4)$$

Izpeljava

V izrazu za izračun korelacije (4.1) pišimo $t_2 = t_1 + \Delta t$ in korelacijo zapišimo kot vsoto integralov:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1+\Delta t}^{t_1+\Delta t+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1+\Delta t}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt + \frac{1}{T_0} \int_{t_1+T_0}^{t_1+\Delta t+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

V integralu I_2 vpeljimo novo integracijsko spremenljivko $t' = t - T_0$ in upoštevajmo, da sta signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ periodična s periodo T_0

$$I_2 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \overline{f_i(t' + T_0)} f_j(t' + T_0 + \tau) dt' = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \overline{f_i(t')} f_j(t' + \tau) dt'.$$

Vsota integralov $I_1 + I_2$ je zato

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_2 + I_1 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt + \frac{1}{T_0} \int_{t_1+\Delta t}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt = \varphi_{ij}(\tau). \end{aligned}$$

4.1.1.3 Periodičnost

Korelacija je periodičen signal s periodo T_0 :

$$\varphi_{ij}(\tau + T_0) = \varphi_{ij}(\tau). \quad (4.5)$$

Izpeljava

Izhajamo iz (4.1) in upoštevajmo, da je signal $f_j(t)$ periodičen s periodo T_0

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\tau + T_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau + T_0) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt = \varphi_{ij}(\tau). \end{aligned}$$

Komentar

Ker ima korelacija enako periodo, kot jo imata signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$, je korelacija preslikava vektorskega prostora signalov z enako periodo samega vase.

4.1.1.4 Antisimetričnost

Za korelacijo velja lastnost antisimetričnosti:

$$\varphi_{ji}(\tau) = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)}. \quad (4.6)$$

Izpeljava

Zopet izhajajmo iz (4.1) in za par signalov $f_j(t)$ in $f_i(t)$ vpeljimo novo spremenljivko $t' = t + \tau$:

$$\varphi_{ji}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+\tau+T_0} \overline{f_j(t)} f_i(t + \tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1+\tau}^{t_1+\tau+T_0} \overline{f_j(t' - \tau)} f_i(t') dt'.$$

Če upoštevamo lastnost (4.4) in dvakrat konjugiramo vrednost integranda, dobimo

$$\begin{aligned} \varphi_{ji}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1+\tau}^{t_1+\tau+T_0} \overline{f_j(t' - \tau)} f_i(t') dt' = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{\overline{f_i(t')} \overline{f_j(t' - \tau)}} dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t') f_j(t' - \tau)} dt' = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)}. \end{aligned}$$

Komentar

Iz (4.6) je razvidno, da je križna korelacija $\varphi_{ji}(\tau)$ le zrcalna slika korelacije $\varphi_{ij}(\tau)$, kjer se njen realni del prezrcali preko ordinatne osi, imaginarni del pa skozi koordinatno izhodišče. Pri uporabi korelacije pri obdelavi signalov zato zadošča, da določimo le eno izmed njiju.

Če sta signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ realna, je tudi njuna korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ realna. V tem primeru se lastnost antisimetričnosti poenostavi v

$$\varphi_{ji}(\tau) = \varphi_{ij}(-\tau).$$

4.1.1.5 Frekvenčna predstavitev

Kompleksni spekter korelacije:

$$\varphi_{ij}(\tau) \longleftrightarrow \phi_{ij}(n) = \overline{F_i(n)} \cdot F_j(n) \quad (4.7)$$

Izpeljava

Ker je korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ periodičen signal, je smiselno postaviti vprašanje, ali jo lahko izrazimo s Fourierovo vrsto in ali lahko izvedemo zvezo med kompleksnima spektroma $F_i(n)$ in $F_j(n)$ signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ ter kompleksnim spektrom $\phi_{ij}(n)$ njune korelacije $\varphi_{ij}(\tau)$?

Privzemimo, da sta signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ taka periodična signala, da zadoščata Dirichletovim pogojem¹ in ju zato lahko izrazimo s Fourierovo vrsto. Zapišimo

¹Glej razdelek 3.1.1 o konvergenci Fourierove vrste.

izraz za korelacijo (4.1), upoštevajmo zgornjo predpostavko ter zamenjajmo vrstni red integriranja in seštevanja:

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_j(n) e^{jn\omega_0(t+\tau)} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_j(n) e^{jn\omega_0\tau} \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} e^{jn\omega_0 t} dt.\end{aligned}$$

Ker je

$$\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} e^{jn\omega_0 t} dt = \overline{\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t) e^{-jn\omega_0 t} dt} = \overline{F_i(n)},$$

je

$$\varphi_{ij}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{F_i(n)} F_j(n) e^{jn\omega_0\tau}. \quad (4.8)$$

V primeru, ko je možno določiti kompleksni spekter korelacije $\phi_{ij}(n)$ in je Fourier-ova vrsta za $\varphi_{ij}(\tau)$ konvergentna, lahko zapišemo

$$\widetilde{\varphi}_{ij}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ij}(n) e^{jn\omega_0\tau}. \quad (4.9)$$

Ali lahko iz primerjave izrazov (4.8) in (4.9) sklepamo, da je

$$\phi_{ij}(n) = \overline{F_i(n)} \cdot F_j(n) ?$$

Ker sta izraza (4.8) in (4.9) za $\varphi_{ij}(\tau)$ predstavljena z vrsto, je, kot to sledi iz lastnosti seštevanja, povsem mogoče, da se pri enaki vsoti vrste, člani vrste ne ujemajo.

Po definiciji (3.3) določimo kompleksni spekter $\phi_{ij}(n)$, tako da pri tem upoštevamo veljavnost izraza (4.8) in zamenjajmo vrstni red seštevanja in integriranja:

$$\begin{aligned}\phi_{ij}(n) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \varphi_{ij}(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{F_i(m)} F_j(m) e^{jm\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{F_i(m)} F_j(m) \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jm\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0\tau} d\tau.\end{aligned} \quad (4.10)$$

Označimo

$$\phi_m(\tau) = e^{jm\omega_0\tau}$$

in dobimo

$$\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jm\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0\tau} d\tau = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \phi_m(\tau) \overline{\phi_n(\tau)} d\tau ,$$

kar lahko po (2.12) izrazimo s skalarnim produktom:

$$\frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} e^{jm\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0\tau} d\tau = \frac{1}{T_0} \langle \phi_m(\tau), \phi_n(\tau) \rangle . \quad (4.11)$$

V razdelku 2.4.4 smo navedli, da temeljne funkcije oblike $\phi_m(\tau) = e^{jm\omega_0\tau}$ tvorijo poln ortogonalen sistem temeljnih funkcij, zato je

$$\langle \phi_m(\tau), \phi_n(\tau) \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ T_0, & n = m . \end{cases} \quad (4.12)$$

Iz zapisa (4.11) in ob upoštevanju lastnosti ortogonalnosti (4.12) lahko izraz (4.10) nadalje zapišemo kot

$$\phi_{ij}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{F_i(m)} F_j(m) \frac{1}{T_0} \langle \phi_m(\tau), \phi_n(\tau) \rangle = \overline{F_i(n)} F_j(n) \frac{1}{T_0} T_0 = \overline{F_i(n)} F_j(n) .$$

S tem smo lastnost (4.7) dokazali!

Komentar

Ker je po (4.7)

$$\phi_{ij}(n) = \overline{F_i(n)} F_j(n) ,$$

od tod lahko tudi zaključimo, da v primeru, ko lahko periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ zapišemo s Fourierovo vrsto, lahko s Fourierovo vrsto zapišemo tudi njuno korelacijo $\varphi_{ij}(\tau)$.

4.1.1.6 Zveznost

Korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ je zvezna funkcija, če sta le močnostna periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ omejeni in vsaj odsekoma zvezni funkciji.

Utemeljitev

Zveznost korelacijske funkcije je pogojena z njeno definicijo kot določenim integralom integranda, ki je omejena in odsekoma zvezna funkcija.

Posledica

V primeru, ko sta periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ omejeni in vsaj odsekoma zvezni funkciji, je zaradi (3.5) Fourierova vrsta njune korelacije povsod enaka korelaciji:

$$\widetilde{\varphi}_{ij}(\tau) = \varphi_{ij}(\tau) \quad \text{za vsak } \tau .$$

4.1.2 Avtokorelacija

Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je korelacija periodičnega signala $f_i(t)$ s samim seboj:

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt . \quad (4.13)$$

Ugotovimo njene lastnosti!

4.1.2.1 Neodvisnost od izbire spodnje meje t_1

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt . \quad (4.14)$$

Izpeljava

To je splošna lastnost korelacije periodičnih signalov (4.4) in zato veljavna tudi za avtokorelacijo.

4.1.2.2 Hermitova simetrija

$$\varphi_{ii}(\tau) = \overline{\varphi_{ii}(-\tau)} \quad (4.15)$$

Izpeljava

Lastnost direktno sledi iz lastnosti antisimetričnosti (4.6), kjer namesto $f_j(t)$ pišemo $f_i(t)$.

Posledice

Če je signal $f_i(t)$ realen, potem je tudi avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ realna in velja

$$\varphi_{ii}(-\tau) = \varphi_{ii}(\tau) . \quad (4.16)$$

V tem primeru je torej avtokorelacija soda funkcija.

Komentar

Lastnost Hermitove simetrije dejansko pomeni, da je potek avtokorelacije povsem določen z njenimi vrednostmi na pozitivni (ali negativni) strani časovne osi. Ker je avtokorelacija periodičnega signala periodičen signal (4.17), je dejansko že povsem določena s svojimi vrednostmi na polovičnem intervalu periode², to je za

$$0 \leq \tau < \frac{T_0}{2} .$$

4.1.2.3 Periodičnost

$$\varphi_{ii}(\tau + T_0) = \varphi_{ii}(\tau) \quad (4.17)$$

Izpeljava

Lastnost periodičnosti je splošna lastnost korelacije periodičnih signalov (4.5) in zato velja tudi za avtokorelacijo.

²Glej primer 4.2.

4.1.2.4 Povprečna moč signala $f_i(t)$

$$\varphi_{ii}(0) = P_{f_i} \quad (4.18)$$

Izpeljava

Vstavimo $\tau = 0$ v izraz, ki določa avtokorelacijo:

$$\varphi_{ii}(0) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_i(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} |f_i(t)|^2 dt = P_{f_i} .$$

Vrednost avtokorelacije pri $\tau = 0$ je enaka povprečni moči signala $f_i(t)$.

4.1.2.5 Frekvenčna predstavitev $\varphi_{ii}(\tau)$

$$\varphi_{ii}(\tau) \longleftrightarrow \phi_{ii}(n) = |F_i(n)|^2 \quad (4.19)$$

Izpeljava

Lastnost sledi neposredno iz splošne lastnosti korelacije (4.7)

$$\phi_{ij}(n) = \overline{F_i(n)} F_j(n) ,$$

kjer namesto $F_j(n)$ pišemo $F_i(n)$.

Posledice

Zaradi lastnosti $\phi_{ii}(n) = |F_i(n)|^2$ je kompleksni spekter $\phi_{ii}(n)$ realen in nenegativen. Zato velja:

$$\begin{aligned} |\phi_{ii}(n)| &= \phi_{ii}(n) , \\ \Theta_{ii}(n) &= 0 . \end{aligned}$$

- Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je periodičen signal s faznim spektrom, ki je enak 0.
- Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je določena le z amplitudnim spektrom $|F_i(n)|$ signala $f_i(t)$ in je zato neodvisna od poteka njegovega faznega spektra $\Theta_i(n)$:

$$\widetilde{\varphi}_{ii}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(n) e^{jn\omega_0\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F_i(n)|^2 e^{jn\omega_0\tau} .$$

Komentar:

To lastnost lahko s pridom uporabimo takrat, ko želimo iz signala $f_i(t)$ izločiti vpliv, ki ga ima na potek signala njegov fazni spekter. Hkrati pa neodvisnost avtokorelacije od faznega spektra izvirnega signala pomeni tudi, da preslikava

$$f_i(t) \longrightarrow \varphi_{ii}(\tau)$$

ni povratno-enolična. Oziroma, da vsi periodični signali z enako periodo, ki se ujema v amplitudnem spektru, določajo enako avtokorelacijsko funkcijo.

Poseben primer te lastnosti sta periodična signala v relaciji

$$f_j(t) = f_i(t - t_0) .$$

Določimo zvezo med njunima kompleksnima spektroma, tako da uvedemo novo integracijsko spremenljivko $t' = t - t_0$:

$$\begin{aligned} F_j(n) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t - t_0) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_1-t_0}^{t_1+T_0-t_0} f_i(t') e^{-jn\omega_0(t'+t_0)} dt' \\ &= e^{-jn\omega_0 t_0} \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t') e^{-jn\omega_0 t'} dt' = e^{-jn\omega_0 t_0} F_i(n) . \end{aligned}$$

Ugotovili smo, da velja

$$F_j(n) = e^{-jn\omega_0 t_0} F_i(n) . \quad (4.20)$$

Če določimo še oba amplitudna spektra, dobimo

$$|F_j(n)| = |e^{-jn\omega_0 t_0} F_i(n)| = |e^{-jn\omega_0 t_0}| \cdot |F_i(n)| = |F_i(n)| . \quad (4.21)$$

- Če periodični signal le premaknemo po časovni osi, se njegov amplitudni spekter ne spremeni.

Ker sta amplitudna spektra signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ enaka, velja tudi

$$\varphi_{jj}(\tau) = \varphi_{ii}(\tau) .$$

Naj bo periodični signal $f_i(t)$ realen. V tem primeru velja (3.19)

$$|F_i(n)| = |F_i(-n)|$$

in zato

$$\phi_{ii}(-n) = \phi_{ii}(n) . \quad (4.22)$$

Zapis Fourierove vrste avtokorelacije $\varphi_{ii}(\tau)$ lahko v tem primeru zaradi simetrije spektra in funkcij sinus in kosinus skrčimo:

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_{ii}(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(n) e^{jn\omega_0 \tau} \\ &= \phi_{ii}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left((\phi_{ii}(n) + \phi_{ii}(n)) \cos n\omega_0 \tau + j(\phi_{ii}(n) - \phi_{ii}(n)) \sin n\omega_0 \tau \right) \\ &= \phi_{ii}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{ii}(n) \cos n\omega_0 \tau . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ker lahko za realne periodične signale določimo koeficiente realne Fourierove vrste a_{in} in b_{in} (3.9), iz zveze (3.13)

$$|F_i(n)| = \frac{1}{2} \sqrt{a_{in}^2 + b_{in}^2}$$

in (4.19) sledi

$$\phi_{ii}(n) = \frac{a_{in}^2 + b_{in}^2}{4}. \quad (4.24)$$

Z uporabo te zveze lahko zapišemo Fourierovo vrsto avtokorelacije $\varphi_{ii}(\tau)$ s koeficienti realne Fourierove vrste:

$$\widetilde{\varphi}_{ii}(\tau) = \frac{a_{i0}^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{in}^2 + b_{in}^2) \cos n\omega_0\tau. \quad (4.25)$$

4.1.2.6 Parsevalova enačba

Zapišimo $\varphi_{ii}(\tau)$ s Fourierovo vrsto

$$\widetilde{\varphi}_{ii}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(n) e^{jn\omega_0\tau}$$

in pogledimo, kaj dobimo, ko je $\tau = 0$:

$$\widetilde{\varphi}_{ii}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(n). \quad (4.26)$$

Kot sledi iz (4.18), vrednost $\varphi_{ii}(0)$ predstavlja ravno povprečno moč P_{f_i} signala $f_i(t)$.

- Izraz (4.26) imenujemo *Parsevalova enačba* za periodične signale.

Od tu razberemo fizikalni pomen kompleksnega spektra avtokorelacije. Zaradi nenegativnosti spektra $\phi_{ii}(n)$ in ker je vsota njihovih vrednosti preko vseh mnogokratnikov osnovne harmonske frekvence ω_0 ravno povprečna moč signala $f_i(t)$, lahko $\phi_{ii}(n)$ interpretiramo kot del moči, ki je vsebovan v signalu $f_i(t)$ pri frekvenci $n\omega_0$. Spekter $\phi_{ii}(n)$ nam pove, kako je v signalu $f_i(t)$ porazdeljena moč v odvisnosti od frekvence $n\omega_0$.

- Spekter $\phi_{ii}(n)$ zato imenujemo močnostni spekter signala $f_i(t)$.

4.1.2.7 Maksimalnost

$$\varphi_{ii}(0) \geq |\varphi_{ii}(\tau)| \quad \text{za vsak } \tau. \quad (4.27)$$

Ker tvorijo periodični močnostni signali z enako periodo vektorski prostor, v katerem lahko določimo skalarni produkt (4.2), za dokaz lahko uporabimo Schwartzovo neenačbo

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle,$$

ki velja v vsakem vektorskem prostoru s skalarnim produktom³.

Za signala $f_i(t + \tau)$ in $f_i(t)$ dobimo

$$|\langle f_i(t + \tau), f_i(t) \rangle|^2 \leq \langle f_i(t + \tau), f_i(t + \tau) \rangle \cdot \langle f_i(t), f_i(t) \rangle .$$

Če upoštevamo (4.3) in (4.21), dobimo

$$\begin{aligned} |\varphi_{ii}(\tau)|^2 &\leq \varphi_{ii}(0) \cdot \varphi_{ii}(0) , \\ |\varphi_{ii}(\tau)|^2 &\leq \varphi_{ii}^2(0) , \\ |\varphi_{ii}(\tau)| &\leq \varphi_{ii}(0) . \end{aligned}$$

4.1.2.8 Zveznost

Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je zvezna funkcija, če je le močnostni periodični signal $f_i(t)$ omejena in vsaj odsekoma zvezna funkcija.

Utemeljitev

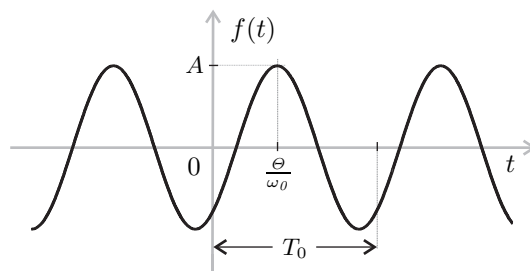
To lastnost smo utemeljili kot splošno lastnost korelacije periodičnih signalov.

Primer 4.1

Naj bo periodični signal $f(t)$ kar sinusno nihanje (slika 4.1) z amplitudo A in periodo T_0 , ki je za $\frac{\Theta}{\omega_0}$ zamaknjeno iz izhodišča:

$$f(t) = A \cos \omega_0(t - \frac{\Theta}{\omega_0}) = A \cos(\omega_0 t - \Theta) .$$

Določimo avtokorelacijo $\varphi(\tau)$ signala $f(t)$ in podajmo njen potek!

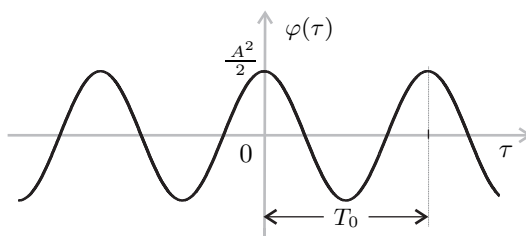


Slika 4.1: Sinusno nihanje $f(t) = A \cos(\omega_0 t - \Theta)$

Rešitev

Avtokorelacijo realnih periodičnih signalov lahko po (4.25) zapišemo z realno Fourierovo vrsto:

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos n\omega_0\tau .$$



Slika 4.2: Avtokorelacija $\varphi(\tau)$ sinusnega nihanja $f(t) = A \cos(\omega_0 t - \Theta)$

Signal $f(t)$ predstavlja sinusno nihanje s frekvenco ω_0 . Ali je njegov zapis, kot je podan v besedilu tega primera, že njegova predstavitev s Fourierovo vrsto?

Realno Fourierovo vrsto za signal $f(t)$ zapišemo kot

$$\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t .$$

Iz primerjave signala

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t - \Theta) = A \cos \Theta \cos \omega_0 t + A \sin \Theta \sin \omega_0 t$$

z zapisom Fourierove vrste, ugotovimo, da je

$$a_1 = A \cos \Theta , \quad b_1 = A \sin \Theta \quad \text{in} \quad a_n = b_n = 0 \quad \text{za} \quad n \neq 1 .$$

Avtokorelacija $\varphi(\tau)$ signala $f(t)$ je zato enaka

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2) \cos \omega_0 \tau = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau .$$

Potek avtokorelacije je prikazan na sliki 4.2. Dobili smo zvezno periodično funkcijo s periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, ki je enaka periodi signala $f(t)$, in maksimumom ob času $\tau = 0$. Povprečno moč signala $f(t)$ razberemo iz vrednosti avtokorelacije pri $\tau = 0$:

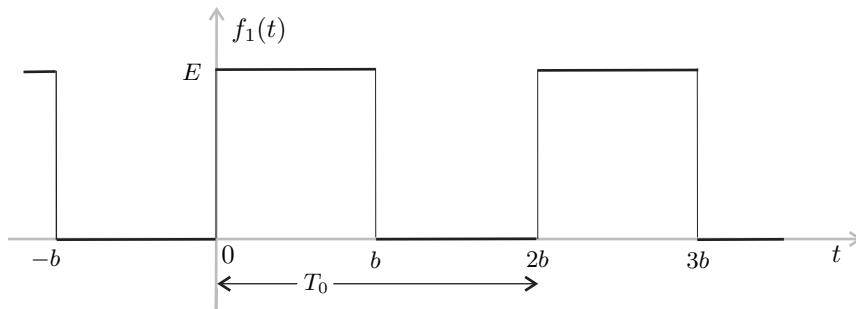
$$\varphi(0) = \frac{A^2}{2} .$$

Primer 4.2

Naj bo periodični signal $f_1(t)$ s periodo $T_0 = 2b$ (slika 4.3) podan z

$$f_1(t) = \begin{cases} E & , \quad 0 \leq t < b \\ 0 & , \quad b \leq t < 2b \\ f(t + n2b) = f(t) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} . \end{cases}$$

³Glej na primer [1].

Slika 4.3: Periodični signal $f_1(t)$

Določimo njegov zapis s Fourierovo vrsto in njegovo avtokorelacijo $\varphi_{11}(\tau)$ ter narišimo njen potek!

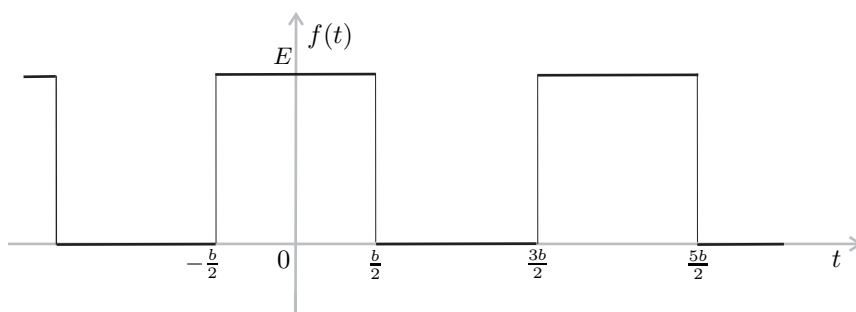
Rešitev

V prejšnjem 3. poglavju smo v primeru 3.2 na strani 67 že določili kompleksni spekter $F(n)$ za signal $f(t)$, podan na sliki 4.4, in dobili

$$F(n) = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}.$$

Signal $f(t)$ je le za $\frac{b}{2}$ po časovni osi v levo premaknjen signal $f_1(t)$:

$$f_1(t) = f\left(t - \frac{b}{2}\right).$$

Slika 4.4: Periodični signal $f(t)$.

Iz lastnosti (4.20) zato sledi

$$F_1(n) = F(n) e^{-jn\omega_0 \frac{b}{2}} = F(n) e^{-jn\omega_0 \frac{T_0}{4}} = \frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} e^{-jn\omega_0 \frac{T_0}{4}}.$$

Fourierova vrsta za signal $f_1(t)$ je potemtakem

$$\tilde{f}_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_1(n) e^{jn\omega_0 t} = \frac{E}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} e^{jn\omega_0(t - \frac{T_0}{4})}.$$

Ker je

$$\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}$$

soda funkcija indeksa n , realni del eksponentne funkcije

$$e^{jn\omega_0(t - \frac{T_0}{4})} = \cos n\omega_0(t - \frac{T_0}{4}) + j \sin n\omega_0(t - \frac{T_0}{4})$$

soda, imaginarni del pa liha funkcija indeksa n , lahko izraz za Fourierovo vrsto signala $f_1(t)$ krajše zapišemo kot

$$\tilde{f}_1(t) = \frac{E}{2} + E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \cos n\omega_0(t - \frac{T_0}{4}).$$

Če izpišemo vrednosti nekaj prvih členov vrste, dobimo

$$\tilde{f}_1(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left(\cos \omega_0(t - \frac{T_0}{4}) - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0(t - \frac{T_0}{4}) + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0(t - \frac{T_0}{4}) - \dots \right).$$

Signal $f_1(t)$ smo predstavili kot neskončno vsoto fazno zamaknjenih sinusnih nihanj.

Tudi avtokorelacijo $\varphi_{11}(\tau)$ realnega periodičnega signala $f_1(t)$ lahko po (4.19) predstavimo s kompleksno Fourierovo vrsto v obliki (4.23)

$$\widetilde{\varphi}_{11}(\tau) = \phi_{11}(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{11}(n) \cos n\omega_0 \tau.$$

Zaradi (4.19) in (4.21) je močnostni spekter signala $f_1(t)$ enak:

$$\phi_{11}(n) = |F_1(n)|^2 = |F(n)|^2 = \left(\frac{E}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right)^2 = \begin{cases} \frac{E^2}{4}, & n = 0 \\ 0, & n = 2k \wedge k \neq 0 \\ \frac{E^2}{\pi^2 n^2}, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Zapišimo nekaj prvih členov Fourierove vrste za $\varphi_{11}(\tau)$. Ker je $f_1(t)$ odsekoma zvezen signal, je

$$\varphi_{11}(\tau) = \widetilde{\varphi}_{11}(\tau) = \frac{E^2}{4} + \frac{2E^2}{\pi^2} \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{1}{9} \cos 3\omega_0 \tau + \frac{1}{25} \cos 5\omega_0 \tau + \dots \right).$$

S tem smo avtokorelacijo $\varphi_{11}(\tau)$ predstavili kot neskončno vsoto samih čistih cosinusnih nihanj⁴.

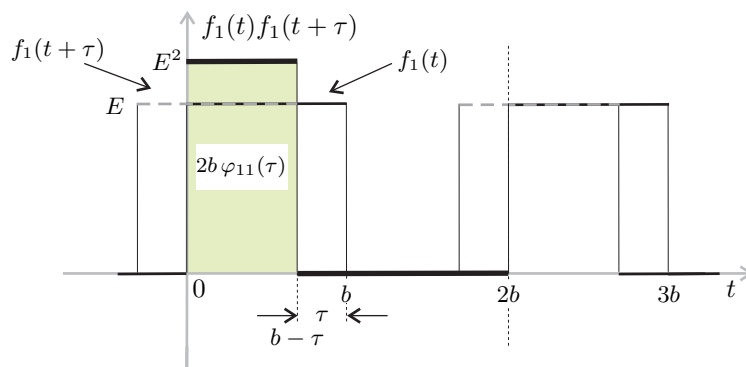
⁴Lahko bi rekli tudi realnih sinusnih nihanj s faznimi zamiki, ki so enaki 0.

Da ugotovimo potek avtokorelacije $\varphi_{11}(\tau)$, je enostavneje, da pri določanju avtokorelacije izhajamo iz izraza (4.13), ki avtokorelacijo definira kot

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{2b} \int_{t_1}^{t_1+2b} f_1(t)f_1(t+\tau) dt .$$

Avtokorelacija ni odvisna od izbire spodnje meje (4.14). V našem primeru je najbolj naravno, da za t_1 izberemo kar $t_1 = 0$.

Če se tako odločimo, je potrebno na intervalu $(0, 2b)$ določiti produkt signalov $f_1(t)f_1(t+\tau)$ in določiti njegov integral. Signal $f_1(t+\tau)$ je po časovni osi zamaknjen signal $f_1(t)$. Če je $\tau > 0$, gre za zamik v levo, sicer se signal zamakne v desno. Vzemimo, da je $\tau > 0$. Situacijo ponazarja slika 4.5.



Slika 4.5: Zmnožek signalov $f(t)$ in $f(t+\tau)$ za $0 \leq \tau \leq b$

Za premike $0 \leq \tau \leq b$ je

$$f_1(t)f_1(t+\tau) = \begin{cases} E^2, & 0 < t < b - \tau \\ 0, & b - \tau < t < 2b. \end{cases}$$

Za avtokorelacijo $\varphi_{11}(\tau)$ tako dobimo

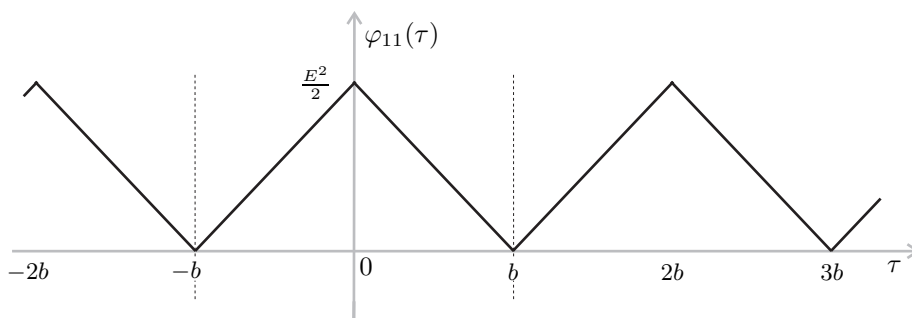
$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{2b} \int_0^{b-\tau} E^2 dt = \frac{E^2}{2b}(b - \tau), \quad 0 \leq \tau \leq b .$$

Ker je avtokorelacija realnega periodičnega signala soda funkcija (4.16), je

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{E^2}{2b}(b + \tau) \quad -b \leq \tau \leq 0 .$$

Tako smo določili avtokorelacijo $\varphi_{11}(\tau)$ na intervalu ene periode $-b \leq \tau \leq +b$. Ker je avtokorelacija periodičnega signala periodična (4.17), vse ostale vrednosti določimo na podlagi te lastnosti:

$$\varphi_{11}(\tau) = \begin{cases} \frac{E^2}{2b}(b - |\tau|) & , \quad -b < \tau < b \\ \varphi_{11}(\tau + k2b) = \varphi_{11}(\tau) , \quad k \in \mathbb{Z} , & \text{drugod .} \end{cases}$$



Slika 4.6: Avtokorelacija $\varphi_{11}(\tau)$ periodičnega signala $f_1(t)$ s slike 4.3

Iz poteka avtokorelacije $\varphi_{11}(\tau)$ (slika 4.6) potrdimo, da je avtokorelacija zvezna funkcija, čeprav je signal $f_1(t)$ le odsekoma zvezen. Lepo se odraža tudi lastnost maksimalnosti (4.27) pri $\tau = 0$. Vrednost $\varphi_{11}(0) = \frac{E^2}{2}$ je povprečna moč signala $f_1(t)$.

4.1.3 Križna korelacija

Križno korelacijo dobimo v primeru določitve korelacije dveh različnih periodičnih signalov z enako periodo:

$$\varphi_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt, \quad f_i(t) \neq f_j(t). \quad (4.28)$$

V tem primeru so lastnosti take transformacije le splošne lastnosti korelacije, ki smo jih našli in izvedli v razdelku 4.1. Naštejmo jih še enkrat:

Neodvisnost od izbire spodnje meje

$$\varphi_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt.$$

Periodičnost

$$\varphi_{ij}(\tau + T_0) = \varphi_{ij}(\tau). \quad (4.29)$$

Antisimetričnost

$$\varphi_{ji}(\tau) = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)}.$$

Frekvenčna predstavitev

V primeru, ko obstajata kompleksna spektra $F_i(n)$ in $F_j(n)$ signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$, je kompleksni spekter $\phi_{ij}(n)$ križne korelacije $\varphi_{ij}(\tau)$ enak

$$\phi_{ij}(n) = \overline{F_i(n)} F_j(n).$$

Zveznost

Križna korelacija je zvezna, če sta signala, ki jo določata, vsaj odsekoma zvezni funkciji.

4.2 Konvolucija periodičnih signalov

Na podoben način kot korelacijo definiramo tudi konvolucijo periodičnih signalov z enako periodo:

$$\varrho_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t) f_j(\tau - t) dt . \quad (4.30)$$

Če sta signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ močnostna periodična signala, njuna konvolucija $\varrho_{ij}(\tau)$ obstaja za vsak časovni zamik τ in predstavlja nov signal.

Izraz (4.30), ki določa konvolucijo, velikokrat označimo z

$$\varrho_{ij}(\tau) = f_i(\tau) * f_j(\tau) , \quad (4.31)$$

kjer $*$ simbolizira operacijo konvolucije med signaloma.

4.2.1 Lastnosti konvolucije periodičnih signalov**4.2.1.1 Neodvisnost od izbire spodnje meje t_1**

Konvolucija je neodvisna od izbire spodnje meje t_1 :

$$\varrho_{ij}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_i(t) f_j(\tau - t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+T_0} f_i(t) f_j(\tau - t) dt . \quad (4.32)$$

Izpeljava

Na enak način kot pri korelaciji.

4.2.1.2 Periodičnost

Konvolucija je periodičen signal s periodo T_0 :

$$\varrho_{ij}(\tau + T_0) = \varrho_{ij}(\tau) . \quad (4.33)$$

Izpeljava

Na enak način kot pri korelaciji.

Komentar

Ker je konvolucija periodičen signal z enako periodo, kot jo imata signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$, je konvolucija preslikava iz vektorskega prostora signalov z enako periodo nazaj v isti prostor.

4.2.1.3 Simetričnost

Konvolucija izpolnjuje lastnost simetričnosti:

$$\varrho_{ji}(\tau) = \varrho_{ij}(\tau) . \quad (4.34)$$

Izpeljava

Izhajamo iz (4.30) in vpeljimo novo spremenljivko $t' = \tau - t$:

$$\varrho_{ji}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{\tau-t_1+T_0} f_j(t) f_i(\tau - t) dt = -\frac{1}{T_0} \int_{\tau-t_1}^{\tau-(t_1+T_0)} f_j(\tau - t') f_i(t') dt' .$$

Če zamenjamo zgornjo in spodnjo mejo integriranja, označimo $t_s = \tau - (t_1 + T_0)$ in upoštevamo neodvisnost konvolucije od izbire spodnje meje integrala (4.32), dobimo

$$\varrho_{ji}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{\tau-(t_1+T_0)}^{\tau-t_1} f_j(\tau - t') f_i(t') dt' = \frac{1}{T_0} \int_{t_s}^{\tau-t_1+T_0} f_i(t') f_j(\tau - t') dt' = \varrho_{ij}(\tau) .$$

Komentar

Ker lahko zaradi (4.31) lastnost simetričnosti predstavimo tudi kot

$$f_j(\tau) * f_i(\tau) = f_i(\tau) * f_j(\tau) ,$$

lahko to lastnost imenujemo tudi *komutativnost* konvolucije.

4.2.1.4 Frekvenčna predstavitev

Kompleksni spekter konvolucije:

$$\varrho_{ij}(\tau) \longleftrightarrow R_{ij}(n) = F_i(n) \cdot F_j(n) \quad (4.35)$$

Izpeljava

Če sta signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ periodična signala, ki ju lahko izrazimo s Fourierovo vrsto, dokažemo zgornjo relacijo na enak način, kot smo to naredili za (4.7) pri korelaciji.

Komentar

Zaradi (4.35) lahko zaključimo, da v primeru, ko lahko periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ predstavimo s Fourierovo vrsto, lahko s Fourierovo vrsto predstavimo tudi njuno konvolucijo $\varrho_{ij}(\tau)$.

4.2.1.5 Zveznost

Konvolucija $\varrho_{ij}(\tau)$ je zvezna funkcija, če sta le močnostna periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ omejeni in vsaj odsekoma zvezni funkciji.

Utemeljitev

Enako kot pri utemeljitvi zveznosti korelacije.

Komentar

V primeru, ko sta periodična signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ omejeni in vsaj odsekoma zvezni funkciji, je zaradi (3.5) Fourierova vrsta njune konvolucije povsod enaka konvoluciji

$$\widetilde{\varrho}_{ij}(\tau) = \varrho_{ij}(\tau) \quad \forall \tau .$$

4.2.1.6 Povezava med korelacijo in konvolucijo

$$\varphi_{ij}(\tau) = \overline{f_i(-\tau)} * f_j(\tau) . \quad (4.36)$$

Izpeljava

Zapišimo korelacijo $\varphi_{ij}(\tau)$ in uvedimo novo spremenljivko $t' = -t$:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt = -\frac{1}{T_0} \int_{-t_1}^{-t_1-T_0} \overline{f_i(-t')} f_j(-t'+\tau) dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-t_1-T_0}^{-t_1} \overline{f_i(-t')} f_j(\tau-t') dt' = \overline{f_i(-\tau)} * f_j(\tau) . \end{aligned}$$

Komentar

Iz (4.36) sledi, da bo korelacija enaka konvoluciji, ko bo

$$f_i(t) = \overline{f_i(-t)} .$$

Če je periodični signal $f_i(t)$ realen, se ta pogoj spremeni v

$$f_i(t) = f_i(-t) .$$

V posebnem primeru torej, ko je signal $f_i(t)$ soda realna funkcija, je konvolucija enaka korelaciji.

Do enakega sklepa bi lahko prišli tudi, če bi primerjali kompleksna spektra konvolucije $R_{ij}(n)$ in korelacije $\phi_{ij}(n)$.

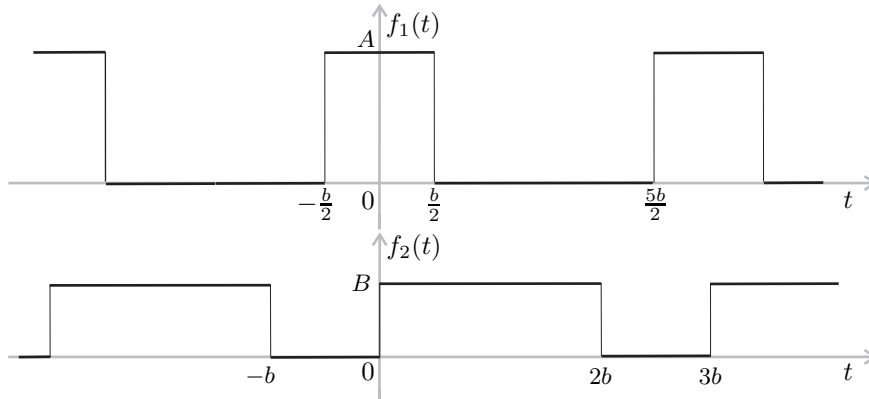
Primer 4.3

Določimo konvolucijo $\rho_{12}(\tau)$ periodičnih signalov $f_1(t)$ in $f_2(t)$ s periodo $T_0 = 3b$ in skicirajmo njen potek!

$$f_1(t) = \begin{cases} A & , -\frac{b}{2} < t \leq \frac{b}{2} \\ 0 & , \frac{b}{2} < t \leq \frac{5b}{2} \\ f_1(t+n3b) = f_1(t) , n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} , \end{cases}$$

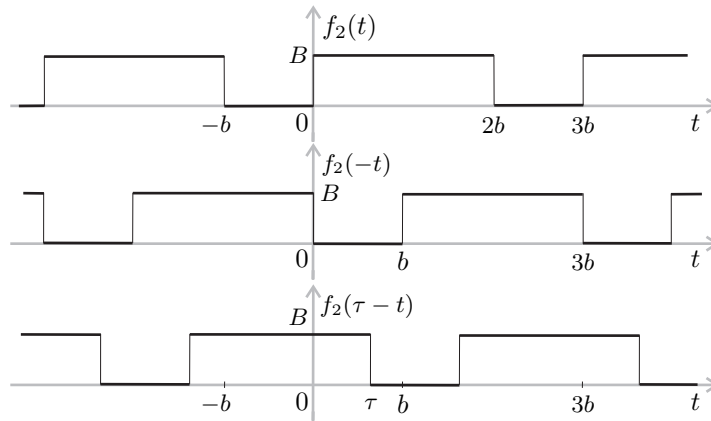
$$f_2(t) = \begin{cases} B & , 0 < t \leq 2b \\ 0 & , 2b < t \leq 3b \\ f_2(t+n3b) = f_2(t) , n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} . \end{cases}$$

Potek signalov $f_1(t)$ in $f_2(t)$ je podan na sliki 4.7.

Slika 4.7: Periodična signala $f_1(t)$ in $f_2(t)$ **Rešitev**

Računajmo konvolucijo

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f_1(t) f_2(\tau - t) dt .$$

Slika 4.8: Periodični signali $f_2(t)$ in $f_2(-t)$ in $f_2(\tau - t)$ v primeru, ko je $\tau > 0$.

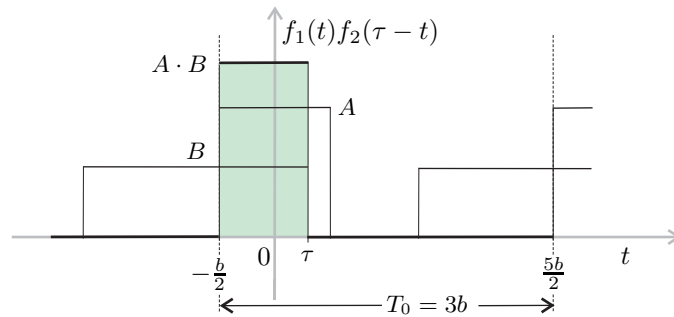
Graf signala $f_2(\tau - t)$ je prezrcaljen in premaknjen graf signala $f_2(t)$. Transformaciji zrcaljenja in premika izvedemo zaporedoma:

$$\begin{aligned} f_2(t) &\rightarrow f_2(-t) && \text{zrcaljenje} \\ f_2(-t) &\rightarrow f_2(-(t - \tau)) && \text{premik} \end{aligned}$$

ali

$$\begin{aligned} f_2(t) &\longrightarrow f_2(t + \tau) && \text{premik} \\ f_2(t + \tau) &\longrightarrow f_2(-t + \tau) && \text{zrcaljenje} . \end{aligned}$$

Prvo zaporedje transformacij je predstavljeno na sliki 4.8.



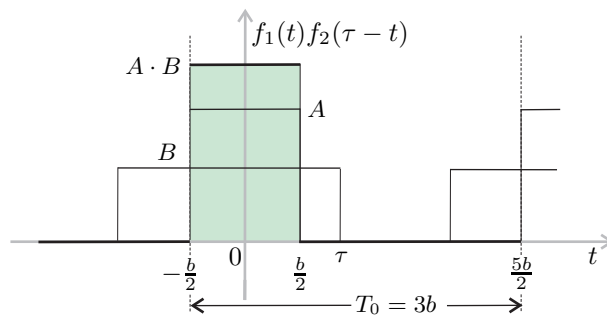
Slika 4.9: Zmnožek signalov $f_1(t)f_2(\tau - t)$ v primeru, ko je $-\frac{b}{2} < \tau < \frac{b}{2}$.

Vzemimo, da je $t_1 = -\frac{b}{2}$.

Naj bo najprej $-\frac{b}{2} < \tau < \frac{b}{2}$. Potek zmnožka $f_1(t)f_2(\tau - t)$ ponazarja slika 4.9. Od tod lahko zaključimo, da v danih pogojih velja:

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{3b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\tau} A \cdot B dt = \frac{AB}{3b} \left(\tau + \frac{b}{2} \right) .$$

Vzemimo, da je $\frac{b}{2} < \tau < \frac{3b}{2}$ (slika 4.10).



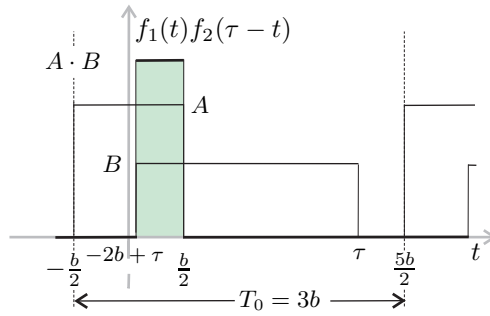
Slika 4.10: Zmnožek signalov $f_1(t)f_2(\tau - t)$ v primeru, ko je $\frac{b}{2} < \tau < \frac{3b}{2}$.

Zmnožek obeh signalov $f_1(t)f_2(\tau - t)$ je tedaj različen od 0 in enak $A \cdot B$ le na

časovnem intervalu dolžine b :

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{3b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} A \cdot B dt = \frac{AB}{3b} \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) = \frac{AB}{3}.$$

Nazadnje si oglejmo še situacijo, ko je $\frac{3b}{2} < \tau < \frac{5b}{2}$, ki jo ponazarja slika 4.11.



Slika 4.11: Zmnožek signalov $f_1(t)f_2(\tau-t)$ v primeru, ko je $\frac{3b}{2} < \tau < \frac{5b}{2}$.

Tedaj je

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{3b} \int_{-2b+\tau}^{\frac{b}{2}} A \cdot B dt = \frac{AB}{3b} \left(\frac{5b}{2} - \tau \right).$$

Tako smo dočili potek konvolucije $\rho_{12}(\tau)$ na intervalu ene periode $-\frac{b}{2} < \tau < \frac{5b}{2}$

$$\rho_{12}(\tau) = \begin{cases} \frac{AB}{3b} \left(\tau + \frac{b}{2} \right), & -\frac{b}{2} < \tau \leq \frac{b}{2} \\ \frac{AB}{3}, & \frac{b}{2} < \tau \leq \frac{3b}{2} \\ \frac{AB}{3b} \left(\frac{5b}{2} - \tau \right), & \frac{3b}{2} < \tau \leq \frac{5b}{2}. \end{cases}$$

Za ostale vrednosti τ potek določimo iz lastnosti periodičnosti:

$$\rho_{12}(\tau + n3b) = \rho_{12}(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Komentar

Ker je signal $f_1(t)$ soda realna funkcija,

$$f_1(t) = f_1(-t),$$

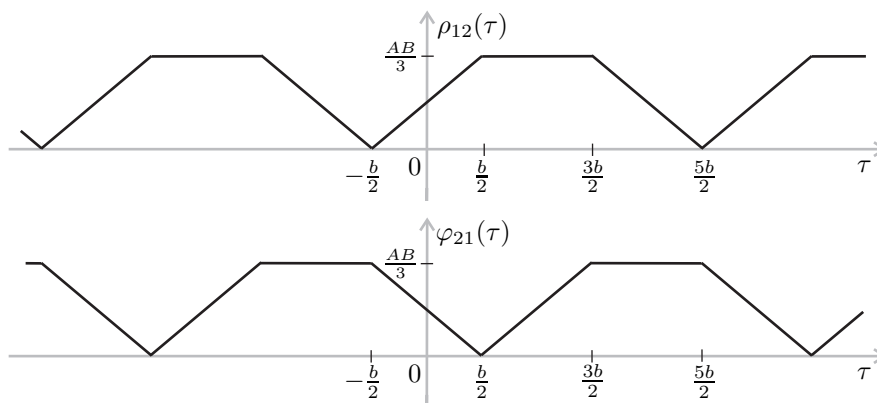
je zaradi (4.36)

$$\varphi_{12}(\tau) = \rho_{12}(\tau).$$

Iz lastnosti antisimetričnosti korelacije (4.6) in realnosti signalov $f_1(t)$ in $f_2(t)$ sledi, da je

$$\varphi_{21}(\tau) = \rho_{12}(-\tau).$$

Poteka konvolucije $\rho_{12}(\tau)$ in križne korelacije $\varphi_{21}(\tau)$ sta podana na sliki 4.12.

Slika 4.12: Poteka konvolucije $\rho_{12}(\tau)$ in korelacije $\varphi_{21}(\tau)$

4.2.2 Periodična funkcija $\delta_{T_0}(t)$

Naj bo $f(t)$ poljubni periodični signal s periodo T_0 , ki ga lahko izrazimo s Fourier-ovo vrsto:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n)e^{jn\omega_0 t},$$

kjer je

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(\tau)e^{-jn\omega_0\tau} d\tau.$$

Izraz za določanje spektra $F(n)$ vstavimo v zapis Fourierove vrste in zamenjajmo vrstni red seštevanja in integriranja⁵:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(\tau)e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \right\} e^{jn\omega_0 t} \\ &= \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(\tau) \left\{ \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0(t-\tau)} \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Označimo

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} \quad (4.37)$$

⁵Vrstni red v tem primeru le formalno zamenjamo in se posebej ne oziramo na konvergenčne kriterije.

in dobimo

$$f(t) = \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(\tau) \delta_{T_0}(t - \tau) d\tau .$$

Če zgornjo enačbo še pomnožimo z $\frac{1}{T_0}$, lahko periodični signal $f(t)$ izrazimo s konvolucijo:

$$\frac{1}{T_0} f(t) = f(t) * \delta_{T_0}(t) . \quad (4.38)$$

- Periodično funkcijo $\delta_{T_0}(t)$ zaradi tega lahko razumemo kot enoto za konvolucijo periodičnih signalov.

Z izrazom (4.37) smo periodično funkcijo $\delta_{T_0}(t)$ predstavili s Fourierovo vrsto, v kateri imajo vse spektralne komponente $\Delta(n)$ enako vrednost

$$\Delta(n) = \frac{1}{T_0} .$$

- Ker je spekter $\Delta(n)$ realen in sod, je periodična funkcija $\delta_{T_0}(t)$ soda funkcija:

$$\delta_{T_0}(t) = \delta_{T_0}(-t) .$$

- Zaradi tega je periodična funkcija $\delta_{T_0}(t)$ tudi enota za korelacijo $\varphi_{\delta_{T_0}} f(t)$:

$$\frac{1}{T_0} f(t) = \delta_{T_0}(t) * f(t) = \varphi_{\delta_{T_0}} f(t) . \quad (4.39)$$

Kakšen je potek tega signala v odvisnosti od časa t ?

Opazujmo družino sodih periodičnih pravokotnih impulzov $\{g_b(t)\}$ z enako periodo T_0 (slika 4.13), za katere velja, da so površine impulzov enake 1:

$$g_b(t) = \begin{cases} E & , E \cdot b = 1 , \quad -\frac{b}{2} \leq t < +\frac{b}{2} \\ 0 & , \quad +\frac{b}{2} \leq t < T_0 - \frac{b}{2} \\ g_b(t + nT_0) = g_b(t) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} \end{cases} . \quad (4.40)$$

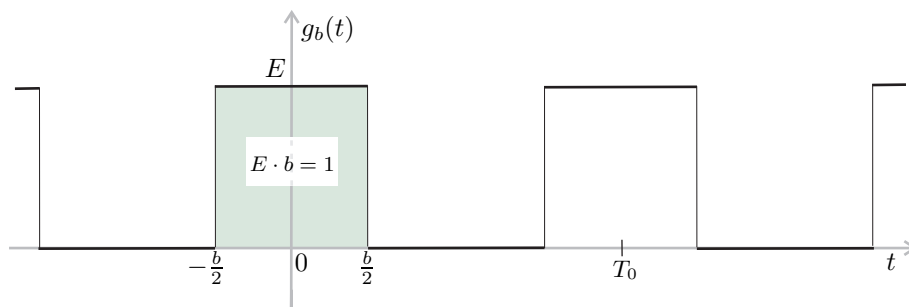
Že v primeru 3.1 smo določili koeficiente realne Fourierove vrste takega signala, vendar brez omejitve, da je $E \cdot b = 1$. Dobili smo:

$$a_n = \frac{2Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} ,$$

$$b_n = 0 .$$

Kompleksni spekter $G_b(n)$ za nenegativne n lahko od tod določimo z uporabo (3.10):

$$G_b(n) = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} = \frac{1}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} .$$

Slika 4.13: Periodični signal $g_b(t)$

Ker je spekter $G_b(n)$ realen, velja zveza tudi za negativne vrednosti parametra n .

Kaj se zgodi s spektrom $G_b(n)$, ko ožimo širino b pravokotnih impulzov?

$$\lim_{b \rightarrow 0} G_b(n) = \frac{1}{T_0} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} = \frac{1}{T_0} = \Delta(n).$$

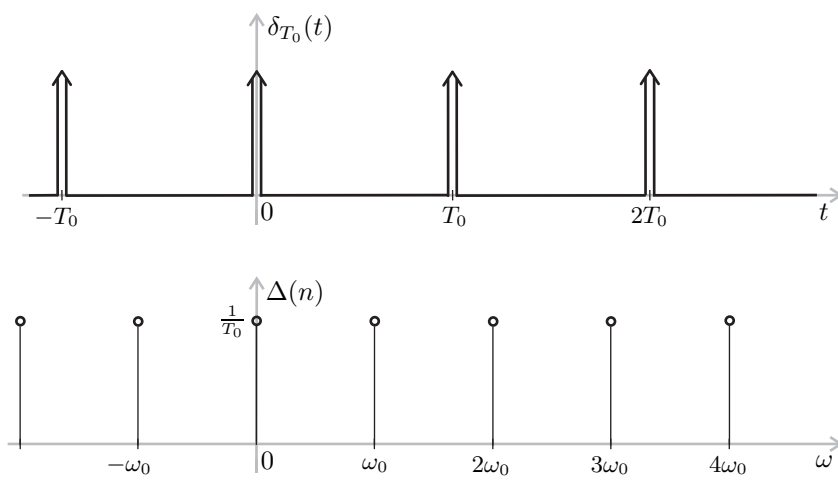
Tako smo prišli do kompleksnega spektra $\Delta(n)$, ki ustreza periodični funkciji $\delta_{T_0}(t)$:

$$\delta_{T_0}(t) \longleftrightarrow \Delta(n) = \frac{1}{T_0}. \quad (4.41)$$

Iz limitnega postopka, s katerim smo prišli do izraza za spekter $\Delta(n)$, uvidimo, da signala $\delta_{T_0}(t)$ ni mogoče praktično realizirati, saj bi to pomenilo realizacijo periodičnega niza impulzov z neomejeno amplitudo in neskončno majhnim časom trajanja. To potrjuje tudi velikost povprečne moči P_δ tega signala, ki je neomejena:

$$P_\delta = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_b^2(t) dt = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E^2 dt = \frac{1}{T_0} \lim_{b \rightarrow 0} E^2 b = \frac{1}{T_0} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} = \infty.$$

Signal $\delta_{T_0}(t)$ simbolično predstavimo s periodičnim zaporedjem odebeljenih puščic, kot na sliki 4.14.



Slika 4.14: Periodična funkcija $\delta_{T_0}(t)$ in njen kompleksni spekter $\Delta(\omega)$

Literatura

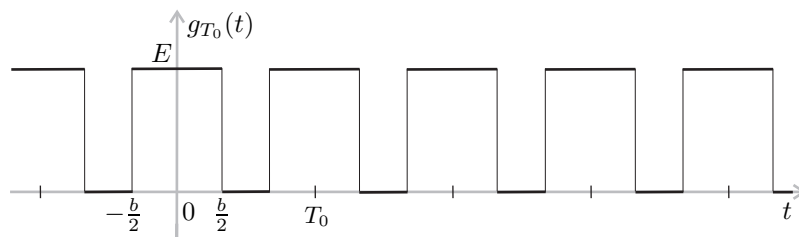
- [1] J. Grasselli: 24. Evklidski prostor, *Višja matematika II*, izd. I. Vidav, DZS, Ljubljana 1975, str. 68–71.

5. Frekvenčna predstavitev neperiodičnih signalov

5.1 Vpliv postopka daljšanja periode na spekter periodičnega signala

Opazujemo družino sodih periodičnih pravokotnih impulzov $\{g_T(t)\}$, ki jim spreminjamo periodo T :

$$g_T(t) = \begin{cases} E & , -\frac{b}{2} \leq t < +\frac{b}{2} \\ 0 & , +\frac{b}{2} \leq t < T - \frac{b}{2} \\ g_T(t + nT) = g_T(t), n \in \mathbb{Z}, & \text{drugod} \end{cases} .$$



Slika 5.1: Periodični signal $g_{T_0}(t)$

Naj bo $T = T_0$ (slika 5.1). Na osnovi rezultatov iz primera 3.1 smo že v razdelku 4.2.2 določili kompleksni spekter $G_0(n)$ takega signala:

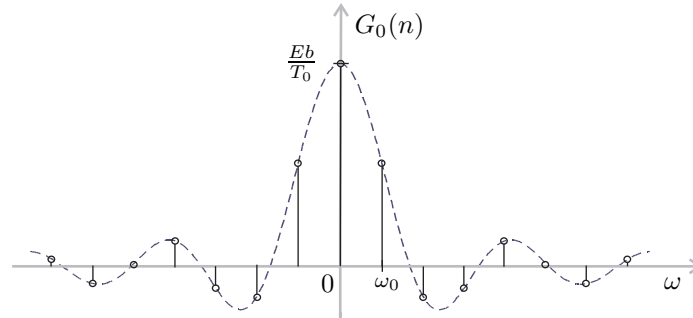
$$G_0(n) = \frac{Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{n\omega_0 b}{2}}{\frac{n\omega_0 b}{2}} .$$

Ker so signali $g_T(t)$ realni in sodi, so zaradi (3.21) tudi spektri $G(n)$ realni. Vrednosti spektra $G_0(n)$ ležijo na krivulji (slika 5.2)

$$\frac{Eb}{T_0} \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}}$$

pri frekvencah $\omega = n\omega_0$, kjer je

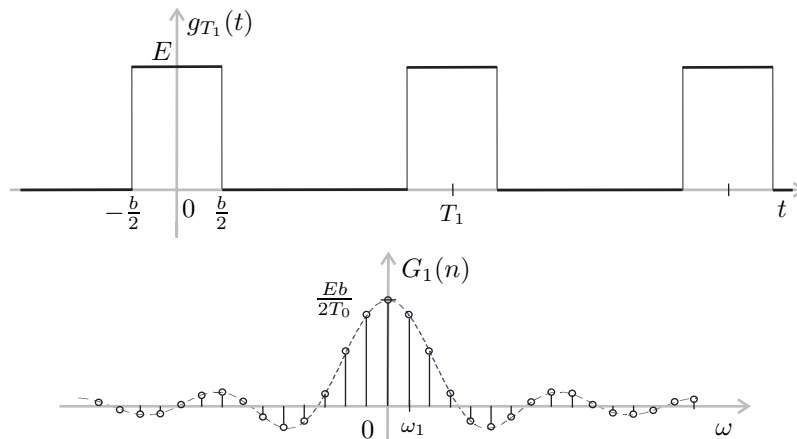
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$



Slika 5.2: Spekter signala $g_{T_0}(t)$

Povečajmo periodo $T_1 = 2T_0$. Dobimo signal $g_{T_1}(t)$ in njegov spekter $G_1(n)$ (slika 5.3):

$$G_1(n) = \frac{Eb}{T_1} \frac{\sin \frac{n\omega_1 b}{2}}{\frac{n\omega_1 b}{2}}.$$

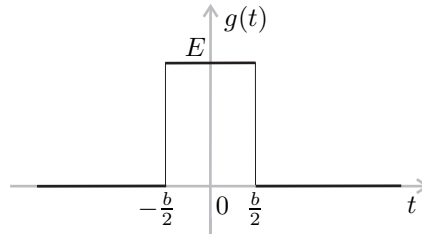


Slika 5.3: Periodični signal $g_{T_1}(t)$ in njegov spekter $G_1(n)$

Ker je $\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}$, so spektralne črte enkrat bolj goste. Amplitude spektra $G_1(n)$ pa se zaradi

$$\frac{Eb}{T_1} = \frac{1}{2} \frac{Eb}{T_0}$$

za polovico zmanjšajo.



Slika 5.4: Neperiodični signal $g(t)$, ki smo ga pridobili iz družine periodičnih signalov $g_T(t)$ s postopkom daljšanja periode T .

Če s postopkom daljšanja periode nadaljujemo, se bo v limiti signal $g_T(t)$ spremenil v neperiodični signal $g(t)$ (slika 5.4):

$$g(t) = \begin{cases} E, & -\frac{b}{2} \leq t < +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$

Spektralne črte se bodo vse bolj zgostile in v limiti prekrile vso frekvenčno os. Spekter bo postal zvezen. Hkrati pa se bodo velikosti spektra $G(n)$ manjšale in v limiti postale infinitezimalno majhne.

5.2 Fourierov integral

Naj bo $f_p(t)$ poljuben periodični signal s periodo T_0 , ki ga lahko izrazimo s Fourierovo vrsto:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) e^{jn\omega_0 t}.$$

Če upoštevamo

$$F(n) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f_p(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau,$$

dobimo

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} f_p(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right\} e^{jn\omega_0 t}. \quad (5.1)$$

Izvedimo postopek daljšanja periode signala $f_p(t)$, kot smo to naredili v prejšnjem razdelku. Posledice, ki od tod sledijo, so

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} f_p(t) = f(t), \quad (5.2)$$

kjer je $f(t)$ neperiodični signal,

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \omega_0 = d\omega, \quad (5.3)$$

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} n\omega_0 = \omega, \quad (5.4)$$

kjer je ω poljubna realna frekvenca in

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.5)$$

S postopkom limitiranja $T_0 \rightarrow \infty$ vrsta (5.1) preide v integral. Če upoštevamo še zveze od (5.2) do (5.5), iz (5.1) dobimo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.6)$$

- Izraz (5.6) imenujemo *Fourierov integral*. S tem, analogno kot smo to naredili pri periodičnih signalih z vrsto (razdelek 3.1), predstavimo zapis neperiodičnega signala $f(t)$ z integralom kompleksnih sinusnih nihanj $e^{j\omega t}$.

Fourierov integral je določen z integralom preko cele frekvenčne osi. Zaradi tega so v neperiodičnih signalih lahko zastopana sinusna nihanja $e^{j\omega t}$ s poljubno realno frekvenco ω .

- Spekter neperiodičnih signalov je zvezen.

Vsako izmed sinusnih nihanj $e^{j\omega t}$ v izrazu za Fourierov integral nastopa pomnoženo z $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} d\omega$, kar je zaradi diferenciala $d\omega$ infinitezimalno majhna količina.

- Sinusna nihanja $e^{j\omega t}$ so v neperiodičnih signalih zastopana z infinitezimalno amplitudo. Končna ostaja le vrednost integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$, ki jo lahko opredelimo kot amplitudno gostoto.

5.2.1 Fourierova transformacija in inverzna Fourierova transformacija

Označimo z

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (5.7)$$

Izraz za Fourierov integral (5.6) lahko tedaj krajše zapišemo kot

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.8)$$

- $F(\omega)$ imenujemo Fourierova transformacija signala $f(t)$ in jo simbolično zapišemo kot

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) .$$

- Izraz za Fourierov integral, predstavljen s (5.8), pa imenujemo inverzna Fourierova transformacija in jo simbolično zapišemo z

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) .$$

Fourierova in inverzna Fourierova transformacija definirata preslikavi med časovno in frekvenčno predstavitev signala. Ker gre za dve med seboj inverzni preslikavi, to pomeni, da za signale, za katere transformaciji obstajata, pridobimo dve med seboj ekvivalentni predstavitvi, ki jih pri obdelavi in analizi signalov lahko enakovredno uporabljamo.

5.2.2 Dirichletovi pogoji

Zadostni pogoji, ki jih mora izpolnjevati signal $f(t)$, da ga lahko izrazimo s Fourierovim integralom, so:

- Signal $f(t)$ je absolutno integrabilen preko cele časovne osi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty .$$

- Signal $f(t)$ ima v vsakem končnem intervalu le končno število nezveznosti.
- Signal $f(t)$ ima v vsakem končnem intervalu le končno število maksimumov in minimumov.

Enako kot zadostne pogoje za konvergenco Fourierove vrste¹ jih imenujemo *Dirichletovi pogoji*.

Pokazati je mogoče [1], da za vsak signal $f(t)$, ki te pogoje izpolnjuje, velja

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{f^+(t) + f^-(t)}{2} . \quad (5.9)$$

Vrednost Fourierovega integrala signala $f(t)$ ob času t je enaka srednji vrednosti leve in desne limite vrednosti signala ob tem času.

To pomeni, da je vrednost Fourierovega integrala enaka vrednosti signala povsod tam, kjer je signal zvezen. Zaradi drugega Dirichletovega pogoja je signal vedno vsaj odsekoma zvezen. Torej se vrednosti signala in njegovega Fourierovega integrala lahko razlikujejo le pri števnem številu časovnih trenutkov.

¹Glej razdelek 3.1.1 na strani 57.

5.3 Kompleksni spekter neperiodičnih signalov

- Fouriejevo transformacijo $F(\omega)$ imenujemo tudi *kompleksni spekter* signala $f(t)$.

Kompleksni zato, ker je to v splošnem kompleksna funkcija in spekter, ker je funkcija frekvence ω . Običajno kompleksni spekter predstavimo v kartezični ali polarni obliki na enak način, kot smo to storili s kompleksnim spektrom periodičnih signalov² $F(n)$.

Kartezični zapis je

$$F(\omega) = C(\omega) + jD(\omega) ,$$

kjer sta spektra $C(\omega)$ in $D(\omega)$ realni funkciji frekvence ω ,

$C(\omega)$ imenujemo *realni spekter*,

$D(\omega)$ pa *imaginarni spekter* signala $f(t)$.

Polarni zapis je

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\Theta(\omega)} ,$$

kjer sta spektra $|F(\omega)|$ in $\Theta(\omega)$ realni funkciji frekvence ω ,

$|F(\omega)|$ imenujemo *spekter amplitudne gostote*,

$\Theta(\omega)$ pa *fazni spekter* signala $f(t)$.

Vrednost kompleksnega spektra $F(\omega)$ je kompleksno število in jo lahko predstavimo kot točko v kompleksni ravnini \mathbb{C} (glej sliko 5.5). Lego točke lahko podamo s pripadajočima odsekoma na realni in imaginarni osi $C(\omega)$ in $D(\omega)$ ali pa z njeno oddaljenostjo od izhodišča $|F(\omega)|$ in faznim kotom $\Theta(\omega)$. Fazni kot $\Theta(\omega)$ pri tem definiramo kot kót med pozitivno realno osjo in zveznico med koordinatnim izhodiščem in točko $F(\omega)$. Iz kartezičnega zapisa lahko vedno preidemo v polarni zapis in obratno:

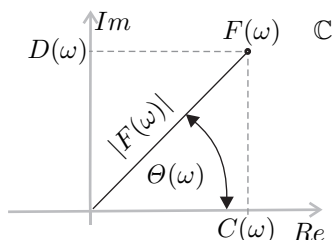
$$|F(\omega)| = +\sqrt{C(\omega)^2 + D(\omega)^2} = +\sqrt{F(\omega) \cdot \overline{F(\omega)}} , \quad (5.10)$$

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \arctg \frac{D(\omega)}{C(\omega)} , & C(\omega) > 0 \\ \pm\pi + \arctg \frac{D(\omega)}{C(\omega)} , & C(\omega) < 0 , \end{cases} \quad (5.11)$$

$$C(\omega) = |F(\omega)| \cdot \cos \Theta(\omega) ,$$

$$D(\omega) = |F(\omega)| \cdot \sin \Theta(\omega) .$$

²Glej razdelek 3.1.3 na strani 60.



Slika 5.5: Določitev lege $F(\omega)$ v kompleksni ravnini \mathbb{C}

Spekter $F(\omega)$ največkrat določimo v kartezični obliki, to je s spektroma $C(\omega)$ in $D(\omega)$. S stališča interpretacije frekvenčnih lastnosti signalov pa je pomembnejša predstavitev v polarni obliki. To je s spektroma $|F(\omega)|$ in $\theta(\omega)$.

Spekter amplitudne gostote $|F(\omega)|$ tako podaja amplitudno gostoto sinusnega nihanja $e^{j\omega t}$ pri frekvenci ω , ki je vsebovano v signalu $f(t)$, fazni spekter $\theta(\omega)$ pa njegov fazni zamik.

5.4 Lastnosti Fourierove transformacije

5.4.1 Lastnosti spektrov realnih neperiodičnih signalov

Vzemimo, da je signal $f(t)$ realen. Iz razširjenega zapisa njegove Fourierove transformacije

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

sledi

$$C(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (5.12)$$

$$D(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (5.13)$$

Ker je $\cos \omega t$ soda, $\sin \omega t$ pa liha funkcija spremenljivke ω , velja:

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}, \quad (5.14)$$

$$C(-\omega) = C(\omega), \quad (5.15)$$

$$D(-\omega) = -D(\omega) \quad (5.16)$$

in tudi

$$|F(-\omega)| = |F(\omega)|, \quad (5.17)$$

$$\theta(-\omega) = -\theta(\omega). \quad (5.18)$$

- Iz naštetih lastnosti sledi, da je spekter realnih signalov popolnoma določen že s svojim potekom za pozitivne frekvence ω . Potek spektra za negativne frekvence je le sodo ali liho prezrcaljen potek spektra s pozitivne frekvenčne osi.

Naj bo realni signal $f(t)$ tudi sode funkcija:

$$f(t) = f(-t) .$$

Produkt $f(t) \cdot \sin \omega t$ je tedaj liha funkcija in zaradi (5.13) velja $D(\omega) = 0$. V tem primeru je torej

$$F(\omega) = C(\omega) \in \mathbb{R} \quad \text{in} \quad (5.19)$$

$$F(\omega) = F(-\omega) . \quad (5.20)$$

Podobno velja, če je $f(t)$ realna liha funkcija:

$$f(t) = -f(-t) .$$

V tem primeru je produkt $f(t) \cdot \cos \omega t$ liha funkcija in zaradi (5.12) velja $C(\omega) = 0$. Tedaj je

$$F(\omega) = j D(\omega) \in \mathbb{I} \quad \text{in} \quad (5.21)$$

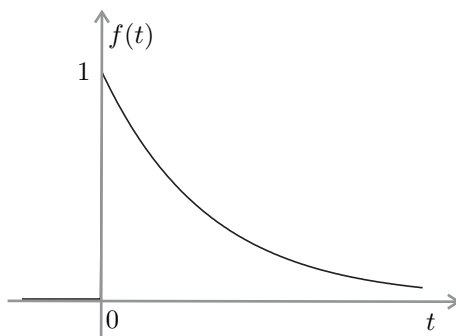
$$F(\omega) = -F(-\omega) . \quad (5.22)$$

Primer 5.1

Za signal

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} , & t > 0 \quad , \quad a > 0 \\ 0 , & \text{drugod} \end{cases}$$

s slike 5.6 določimo njegov kompleksni spekter $F(\omega)$ in realne spektre $C(\omega)$, $D(\omega)$, $|F(\omega)|$, $\theta(\omega)$ ter narišimo njihov potek.



Slika 5.6: Potek signala $f(t)$

Rešitev

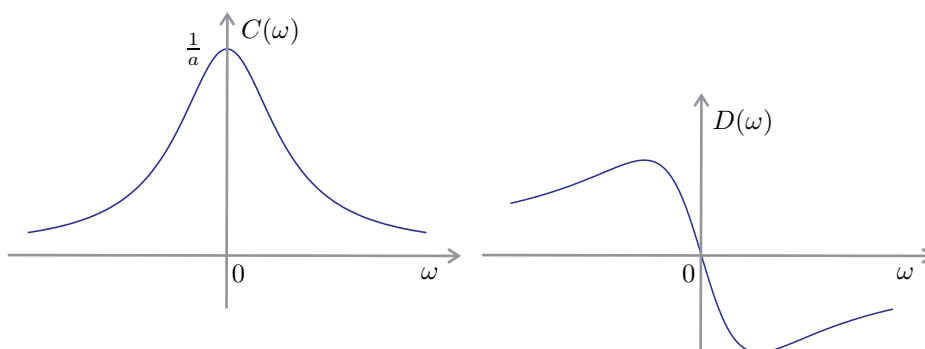
Izračunajmo najprej kompleksni spekter:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Iz izraza za $F(\omega)$ sledi

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \frac{a}{a^2+\omega^2}, \\ D(\omega) &= -\frac{\omega}{a^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

Hitro lahko preverimo, da je spekter $C(\omega)$ soda, spekter $D(\omega)$ pa liha funkcija frekvence ω . Simetrije potekov spektrov so razvidne tudi iz slike 5.7.



Slika 5.7: Potek realnega spektra $C(\omega)$ in imaginarnega spektra $D(\omega)$ signala $f(t)$

Spekter amplitudne gostote:

$$|F(\omega)| = +\sqrt{C(\omega)^2 + D(\omega)^2} = +\sqrt{\frac{a^2 + \omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2}} = \frac{1}{+\sqrt{a^2 + \omega^2}}.$$

Ker je $C(\omega) > 0$, je fazni spekter $\Theta(\omega)$ enak:

$$\Theta(\omega) = \arctan \frac{D(\omega)}{C(\omega)} = \arctan\left(-\frac{\omega}{a}\right) = -\arctan \frac{\omega}{a}.$$

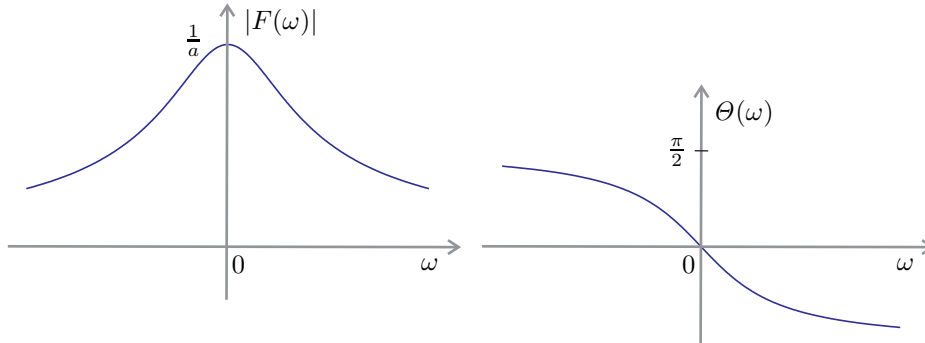
Poteka spektra amplitudne gostote $|F(\omega)|$ in faznega spektra $\Theta(\omega)$ ter njuni simetriji so razvidni iz slike 5.8.

Primer 5.2

Za signal³ (slika 5.9)

$$f(t) = Ee^{-at^2}, \quad E, a > 0,$$

³Funkcijsko obliko $f(t)$ običajno imenujemo tudi *Gaussova* ali *normalna porazdelitev*.



Slika 5.8: Potek spektra amplitudne gostote $|F(\omega)|$ in faznega spektra $\Theta(\omega)$ signala $f(t)$

določimo kompleksni spekter $F(\omega)$ in narišimo njegov potek.

Rešitev

Kompleksni spekter:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = E \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt .$$

Nedoločenega integrala take oblike se ne da izračunati z elementarnimi funkcijami, zato si pomagajmo z lastnostmi Fourierove transformacije:

$$\begin{aligned} \frac{dF(\omega)}{d\omega} &= -E \int_{-\infty}^{\infty} jte^{-at^2} e^{-j\omega t} dt , \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [Ee^{-at^2} e^{-j\omega t}] dt &= Ee^{-at^2} e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 . \end{aligned}$$

Če integrand odvajamo, dobimo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} [Ee^{-at^2} e^{-j\omega t}] dt &= E \int_{-\infty}^{\infty} (-2ate^{-at^2} e^{-j\omega t}) dt \\ &\quad + E \int_{-\infty}^{\infty} (-j\omega e^{-j\omega t} e^{-at^2}) dt \\ &= -j2a \frac{dF(\omega)}{d\omega} - j\omega F(\omega) . \end{aligned}$$

Za kompleksni spekter $F(\omega)$ smo dobili diferencialno enačbo

$$-j\omega F(\omega) - j2a \frac{dF(\omega)}{d\omega} = 0 ,$$

ki jo pomnožimo z $j(d\omega/F(\omega))$ in dobimo

$$2a \frac{dF(\omega)}{F(\omega)} + \omega d\omega = 0 .$$

Zgornjo diferencialno enačbo z ločljivimi spremenljivkami integriramo:

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{2} + 2a \ln F(\omega) &= 2a \ln C, & C > 0, \\ \ln F(\omega) &= -\frac{\omega^2}{4a} + \ln C, \\ F(\omega) &= C e^{-\omega^2/4a}.\end{aligned}$$

Vrednost konstante C lahko določimo iz naslednjih zvez:

$$\begin{aligned}F(0) = C &= E \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt, \\ \int_0^{\infty} e^{-a^2 t^2} dt &= \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.\end{aligned}$$

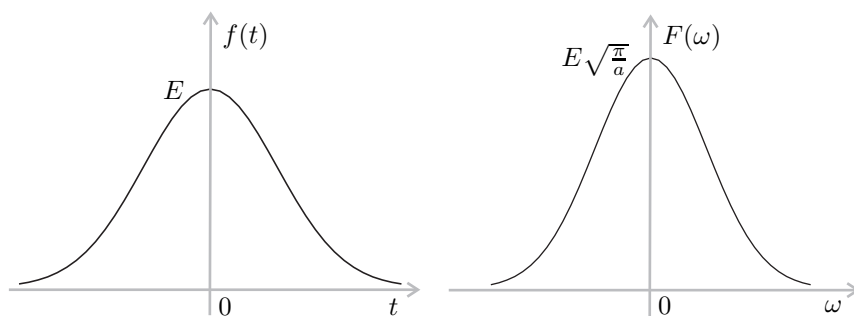
Sledi:

$$C = E \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Iz zgoraj določenih izrazov vidimo, da se potek kompleksnega spektra $F(\omega)$ funkcij-sko izraža na enak način kot časovni potek signala $f(t)$. Signal $f(t)$ je potemtakem invarianten na Fourierovo transformacijo.

Ker je $F(\omega) > 0$, je

$$|F(\omega)| = F(\omega) \quad \text{in} \quad \theta(\omega) = 0.$$



Slika 5.9: Potek signala $f(t)$ in njegovega spektra $F(\omega)$

5.4.2 Linearnost

Fourierova in inverzna Fourierova transformacija sta linearni transformaciji:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) &= \alpha \mathcal{F}(f_1(t)) + \beta \mathcal{F}(f_2(t)), \\ \mathcal{F}^{-1}(\alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega)) &= \alpha \mathcal{F}^{-1}(F_1(\omega)) + \beta \mathcal{F}^{-1}(F_2(\omega)).\end{aligned}$$

Izpeljava

Lastnost linearnosti Fourierove transformacije sledi iz definicije z določenim integralom:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-j\omega t} dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \alpha F_1(\omega) + \beta F_2(\omega) = \alpha \mathcal{F}(f_1(t)) + \beta \mathcal{F}(f_2(t)) .\end{aligned}$$

Na enak način potrdimo linearnost inverzne Fourierove transformacije.

5.4.3 Lastnost podobnosti**Izpeljava**

$$\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (5.23)$$

Naj bo signal $f(t)$ tak, da je zanj mogoče določiti Fourierovo transformacijo

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) .$$

Naj bo

$$g(t) = f(at) ,$$

kjer je a poljubna od nič različna realna konstanta. Določimo $\mathcal{F}(g(t)) = G(\omega)$, tako da uvedemo novo spremenljivko $t' = at$. Vzemimo najprej, da je $a > 0$:

$$\begin{aligned}G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega \frac{t'}{a}} dt' \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} dt' = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) .\end{aligned}$$

Če je $a < 0$, velja:

$$\begin{aligned}G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} f(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} dt' \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j(\frac{\omega}{a})t'} dt' = \frac{1}{-a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) .\end{aligned}$$

Komentar

Preslikava

$$f(t) \longrightarrow f(at)$$

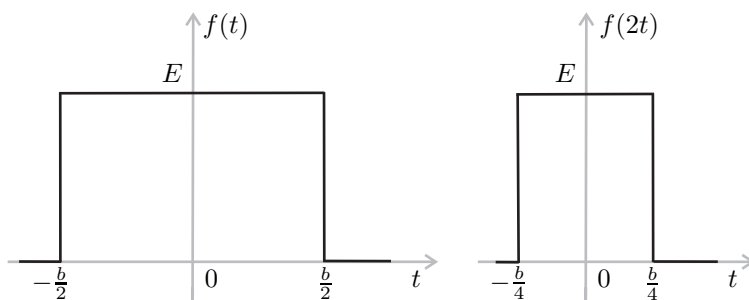
pomeni krčenje ali razteg poteka signala $f(t)$ po časovni osi. Če je $|a| > 1$, je potek signala $f(at)$ skrčen glede na $f(t)$, sicer pa raztegnjen⁴. Lastnost podobnosti (5.23) pravi, da se v primeru, ko se potek signala skrči po časovni osi, njegov spekter po frekvenčni osi raztegne in obratno. To lastnost ponazarja naslednji zgled.

⁴Če je $a < 0$, gre tudi za zrcaljenje preko ordinatne osi.

Primer 5.3

Naj bo $f(t)$ pravokotni impulz širine b in višine E :

$$f(t) = \begin{cases} E, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod} \end{cases} .$$



Slika 5.10: Signala $f(t)$ in $f(2t)$

Določimo kompleksna spektra impulzov $f(t)$ in $f(2t)$. Iz slike 5.10 je razvidno, da je potek signala $f(2t)$ skrčen glede na signal $f(t)$.

Rešitev

Ker je $f(t)$ soda funkcija, je njen kompleksni spekter realen (5.19) in zato

$$\begin{aligned} F(\omega) &= C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E \cos \omega t \, dt = 2E \int_0^{\frac{b}{2}} \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{2E}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{\frac{b}{2}} = 2E \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\omega} = Eb \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} . \end{aligned}$$

Za določitev spektra signala $f(2t)$ uporabimo lastnost podobnosti (5.23):

$$\mathcal{F}(f(2t)) = \frac{1}{2} F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{Eb}{2} \frac{\sin \frac{\omega b}{4}}{\frac{\omega b}{4}} .$$

Poteka obeh spektrov sta podana na sliki 5.11. Opazimo, da je potek spektra signala $f(2t)$ raztegnjen glede na potek spektra signala $f(t)$.

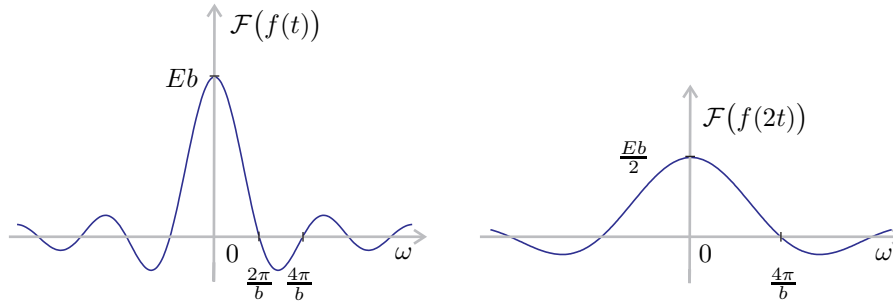
5.4.4 Premik po časovni osi

$$\mathcal{F}(f(t - t_0)) = e^{-j\omega t_0} F(\omega) \quad (5.24)$$

Izpeljava

Naj bo signal $f(t)$ tak, da je zanj mogoče določiti Fourierovo transformacijo:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) .$$

Slika 5.11: Spektra signalov $f(t)$ in $f(2t)$

Naj bo

$$g(t) = f(t - t_0) ,$$

kjer je t_0 poljuben časovni zamik. Določimo $\mathcal{F}(g(t)) = G(\omega)$, tako da uvedemo novo spremenljivko $t' = t - t_0$:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega(t'+t_0)} dt' \\ &= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' = e^{-j\omega t_0} F(\omega) . \end{aligned}$$

Ker je absolutna vrednost produkta kompleksnih števil enaka produktu njihovih absolutnih vrednosti, velja

$$|G(\omega)| = |e^{-j\omega t_0}| |F(\omega)| = |F(\omega)| . \quad (5.25)$$

Spekter amplitudne gostote se zaradi premika signala po časovni osi ne spremeni. Ugotovimo še, kakšna je sprememba faznega spektra:

$$G(\omega) = |G(\omega)| e^{j\Theta_g(\omega)} = |F(\omega)| e^{j\Theta_f(\omega)} e^{-j\omega t_0} = |G(\omega)| e^{j(\Theta_f(\omega) - \omega t_0)} .$$

Iz primerjave leve in desne strani enačbe sledi:

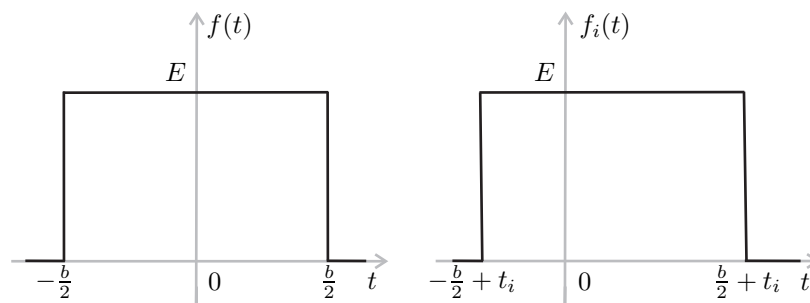
$$\Theta_g(\omega) = \Theta_f(\omega) - \omega t_0 . \quad (5.26)$$

Uvidimo, da časovni zamik povzroči linearno spremembo faznega spektra. Velja tudi obratno.

Primer 5.4

Določimo spekter amplitudne gostote in fazni spekter signalov $f(t)$ in $f_i(t)$ (slika 5.12):

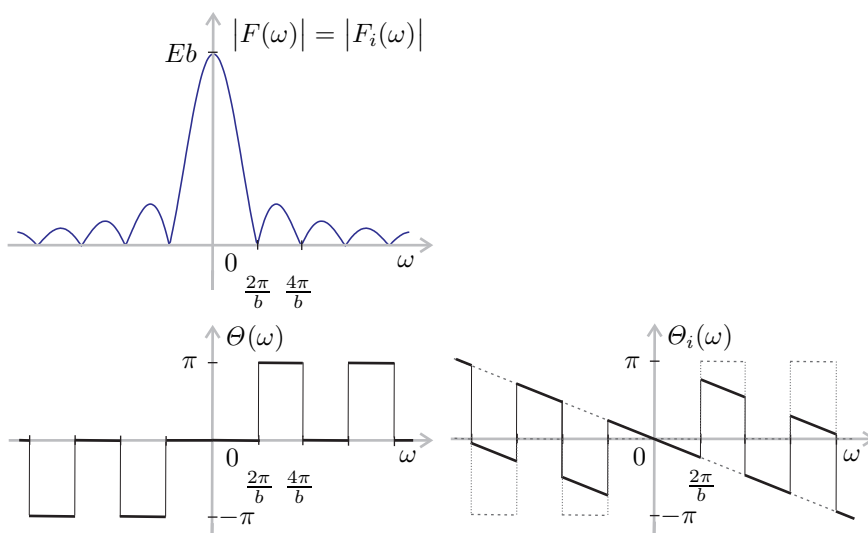
$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} E , & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0 , & \text{drugod} , \end{cases} \\ f_i(t) &= f(t - t_i) . \end{aligned}$$

Slika 5.12: Signala $f(t)$ in $f_i(t)$ za $t_i > 0$ **Rešitev**

V primeru 5.3 na strani 108 smo določili kompleksni spekter $F(\omega)$ signala $f(t)$. Ker je $f(t)$ realna soda funkcija, je spekter realen:

$$F(\omega) = C(\omega) = Eb \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}},$$

$$|F(\omega)| = Eb \left| \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} \right|.$$

Slika 5.13: Spektri $|F(\omega)|$, $|F_i(\omega)|$, $\Theta(\omega)$ in $\Theta_i(\omega)$ za $t_i > 0$

Pri premiku signala po časovni osi se njegov spekter amplitudne gostote ne spre-

meni (5.25). Zato je

$$|F_i(\omega)| = |F(\omega)| = Eb \left| \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} \right|.$$

Imaginarni spekter $D(\omega)$ je enak 0, realni spektra $C(\omega)$ pa spreminja svoj predznak. Če upoštevamo zvezo (5.11), uvidimo, da je

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} 0, & C(\omega) > 0 \\ \pm\pi, & C(\omega) < 0. \end{cases}$$

$\Theta_i(\omega)$ določimo iz (5.26)

$$\Theta_i(\omega) = \Theta(\omega) - t_i \omega.$$

Potek spektra amplitudne gostote in faznih spektrov obeh signalov je podan na sliki 5.13.

5.4.5 Premik po frekvenčni osi

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega - \omega_0)) = e^{j\omega_0 t} f(t) \quad (5.27)$$

Izpeljava

Naj bo signal $f(t)$ tak, da je zanj mogoče določiti Fourierovo transformacijo:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

Naj bo

$$G(\omega) = F(\omega - \omega_0),$$

kjer je ω_0 poljubni frekvenčni zamik. Določimo $\mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) = g(t)$, tako da zapišemo izraz za izračun Fourierove transformacije $F(\omega - \omega_0)$

$$\begin{aligned} F(\omega - \omega_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) e^{j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Iz primerjav zadnjih dveh strani zgornje enačbe vidimo, da je

$$g(t) = f(t) e^{j\omega_0 t}.$$

5.4.6 Amplitudna modulacija

$$\mathcal{F}(f(t) \cos \omega_0 t) = \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)) \quad (5.28)$$

Izpeljava

Naj bo signal $f(t)$ tak, da je zanj mogoče določiti Fourierovo transformacijo:

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega) .$$

Naj bo

$$g(t) = f(t) \cos \omega_0 t ,$$

kjer je ω_0 poljubna frekvenca.

Določimo $\mathcal{F}(g(t)) = G(\omega)$, tako da zapišemo

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

in upoštevamo lastnost premika po frekvenčni osi (5.27) ter linearnost transformacije:

$$g(t) = \frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t} \longleftrightarrow \frac{1}{2}(F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)) .$$

Komentar

Uporabnost lastnosti (5.28) je očitna predvsem v primerih, ko je $\omega_0 \gg W$, kjer je W frekvenčna širina signala $f(t)$:

$$F(\omega) = 0 \iff |\omega| > W .$$

Za take vrednosti modulatorske frekvence ω_0 lastnost (5.28) pomeni, da je spekter moduliranega signala $g(t)$ za frekvenco ω_0 v levo in desno zamaknjen spekter signala $f(t)$. To pomeni, da se je spekter signala $f(t)$ premaknil v neko višje frekvenčno območje z nosilno frekvenco ω_0 . Tak hipotetičen primer je prikazan na sliki 5.14.

Primer 5.5

Določimo spekter amplitudne gostote $|W_H(\omega)|$ signala⁵ $w_H(t)$ (slika 5.15), ki je podan z

$$w_H(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi}{b}t , & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0 , & \text{drugod} . \end{cases}$$

Rešitev

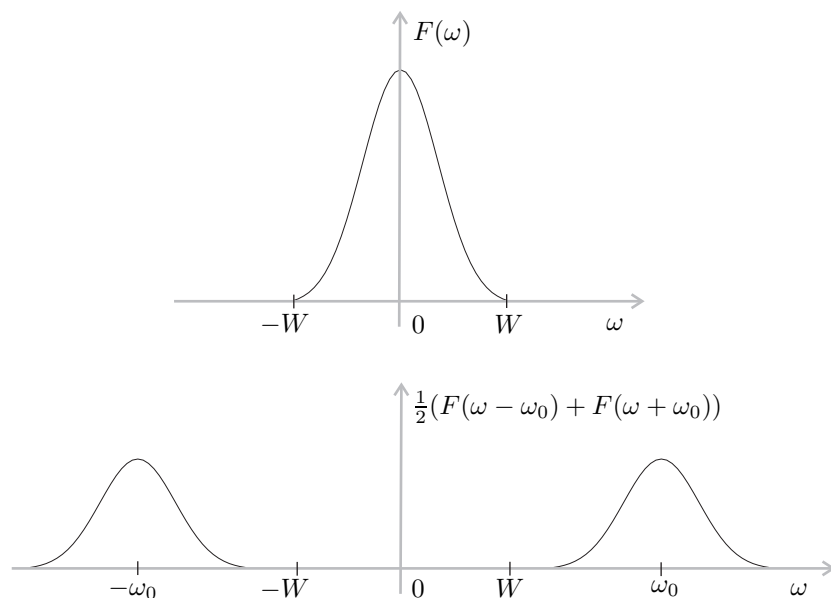
Signal $w_H(t)$ lahko zapišemo kot

$$w_H(t) = (0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi}{b}t) w_p(t) = 0,54 w_p(t) + 0,46 w_p(t) \cos \frac{2\pi}{b}t ,$$

kjer je signal $w_p(t)$ pravokotni impulz širine b in višine 1:

$$w_p(t) = \begin{cases} 1 , & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0 , & \text{drugod} . \end{cases}$$

⁵Signal $w_H(t)$ imenujemo tudi *Hammingovo okno* in ga uporabljamo pri določanju ocene spektra signalov na osnovi dela njihovega poteka. Za podrobnejši opis uporabe glej razdelek 6.2.3.

Slika 5.14: Spektra signalov $f(t)$ in $f(t) \cos \omega_0 t$

Zaradi linearnosti Fourierove transformacije je

$$W_H(\omega) = 0,54 \mathcal{F}(w_p(t)) + 0,46 \mathcal{F}\left(w_p(t) \cos \frac{2\pi}{b} t\right). \quad (5.29)$$

$\mathcal{F}(w_p(t)) = W_p(\omega)$ smo določili že v primeru 5.3:

$$W_p(\omega) = b \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}}. \quad (5.30)$$

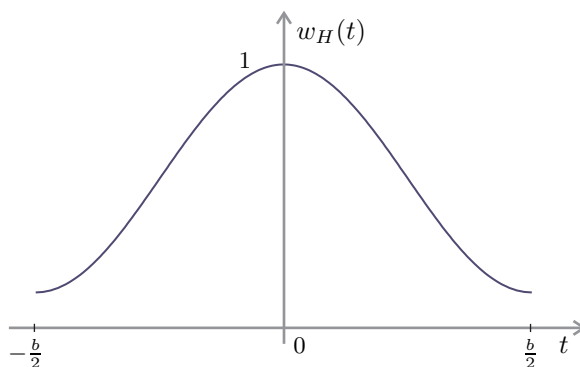
Spekter $\mathcal{F}\left(w_p(t) \cos \frac{2\pi}{b} t\right)$ pa določimo z uporabo lastnosti (5.28) amplitudne modulacije (5.28):

$$\mathcal{F}\left(w_p(t) \cos \frac{2\pi}{b} t\right) = \frac{1}{2} \left(W_p\left(\omega - \frac{2\pi}{b}\right) + W_p\left(\omega + \frac{2\pi}{b}\right) \right). \quad (5.31)$$

Iz (5.29), (5.30) in (5.31) tako dobimo

$$\begin{aligned} W_H(\omega) &= 0,54 W_p(\omega) + 0,23 W_p\left(\omega - \frac{2\pi}{b}\right) + 0,23 W_p\left(\omega + \frac{2\pi}{b}\right) \\ &= 0,54 b \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} + 0,23 b \left(\frac{\sin \frac{(\omega - \frac{2\pi}{b})b}{2}}{\frac{(\omega - \frac{2\pi}{b})b}{2}} + \frac{\sin \frac{(\omega + \frac{2\pi}{b})b}{2}}{\frac{(\omega + \frac{2\pi}{b})b}{2}} \right). \end{aligned}$$

Potek spektra $W_H(\omega)$ je predstavljen na sliki 5.16. Na sliki so črtkano vrisani tudi poteki spektrov $W_p(\omega)$, $W_p(\omega - \frac{2\pi}{b})$ in $W_p(\omega + \frac{2\pi}{b})$. Ker je premik spektra $\omega_0 = \frac{2\pi}{b}$ ravno položaj prve ničle spektra $W_p(\omega)$, se spektralne amplitude izven frekvenčnega območja $(-\frac{4\pi}{b}, \frac{4\pi}{b})$ med seboj odštejejo.



Slika 5.15: Potek signala "Hammingovo okno" $w_H(t)$

5.4.7 Spekter odvoda signala

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = j\omega F(\omega) \quad (5.32)$$

Izpeljava

Naj bo odvedljiv signal $f(t)$ tak, da je zanj mogoče določiti Fourierovo transformacijo

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

in naj bo

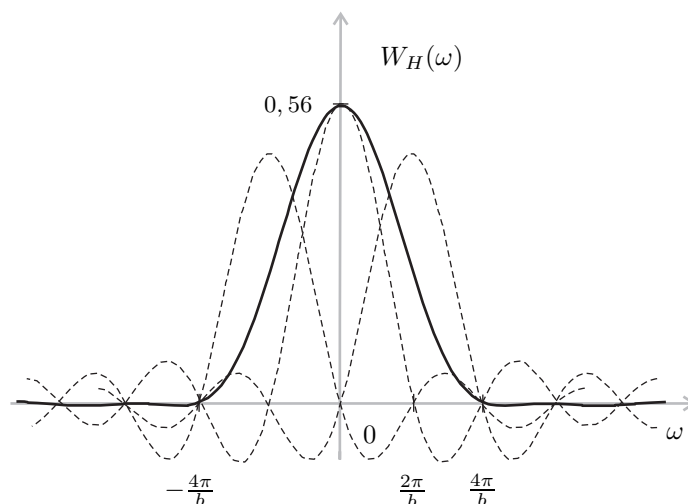
$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Spekter $G(\omega)$ signala $g(t)$ določimo tako, da upoštevamo definicijo odvoda signala $f(t)$ z limito diferencialnega količnika:

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Zamenjamo še vrstni red integriranja in limitiranja:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t+\Delta t)}{\Delta t} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\Delta t} e^{-j\omega t} dt \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (I_1 - I_2). \end{aligned}$$



Slika 5.16: Potek spektra $W_H(\omega)$, predstavljen z vsoto treh zamaknjenih spektrov pravokotnega impulza $w_p(t)$.

Ko v I_1 vpeljemo novo spremenljivko $t' = t + \Delta t$, dobimo:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t')}{\Delta t} e^{-j\omega(t'-\Delta t)} dt' = \frac{e^{j\omega\Delta t}}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' = \frac{e^{j\omega\Delta t} F(\omega)}{\Delta t},$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{\Delta t} e^{-j\omega t} dt = \frac{F(\omega)}{\Delta t},$$

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (I_1 - I_2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} F(\omega) \frac{e^{j\omega\Delta t} - 1}{\Delta t} = F(\omega) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{e^{j\omega(0+\Delta t)} - e^{j\omega 0}}{\Delta t} \\ &= F(\omega) \left. \frac{de^{j\omega t}}{dt} \right|_{t=0} = j\omega F(\omega). \end{aligned}$$

Če je signal $f(t)$ n -krat odvedljiv, zgornjo zvezo lahko posplošimo na

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (j\omega)^n F(\omega). \quad (5.33)$$

Komentar

Pri obdelavi signalov velikokrat naletimo na situacijo, ko lahko signal razdelimo na "koristni signal" in "šum" ali "motnje". S "šumom" opredelimo tisti del signala, ki pri izbrani obdelavi ne nosi "informacije". Pogosto je koristni del zastopan v nižjem delu spektra signala, šum pa je visokofrekvenčne narave⁶. V takem primeru se razmerje signal/šum poslabša, če namesto originalnega signala $f(t)$

⁶Tak primer šuma je na primer "kvantizacijski šum". Glej poglavje 9.

obravnavamo njegov odvod $g(t)$, saj zaradi zveze

$$\mathcal{F}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = G(\omega) = j\omega F(\omega)$$

velja:

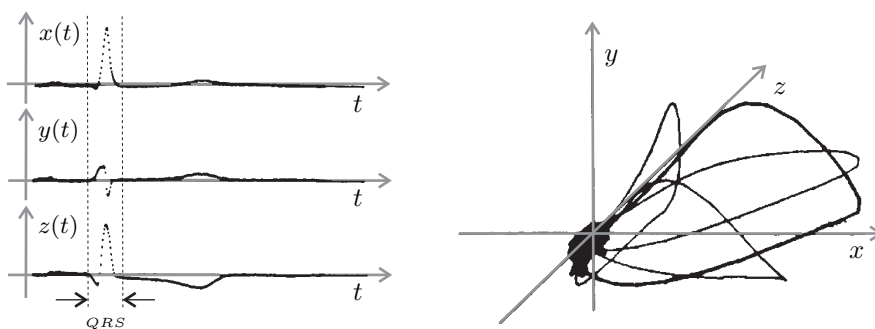
$$\begin{aligned} |G(\omega)| &> |F(\omega)|, & \omega > 1, \\ |G(\omega)| &< |F(\omega)|, & \omega < 1. \end{aligned}$$

Zaradi (5.33) se negativni učinek še poveča, če namesto prvega odvoda obravnavamo višji odvod signala $f(t)$.

Poglejmo si praktični primer [2], ko je bilo potrebno zaradi spremenjenega razmerja signal/šum, ki je bilo posledica večkratnega odvajanja signalov, postopek obdelave signalov posebej prirediti.

Primer 5.6

Elektrokardiografske signale⁷ lahko z ustrezno porazdelitvijo elektrod po telesu izmerimo v različnih smereh. S posebno razdelitvijo elektrod lahko pridobimo tudi elektrokardiografske signale v treh ortogonalnih smereh \vec{x} , \vec{y} in \vec{z} glede na normalno lego človeškega telesa. Tako pridobljeno trojko elektrokardiografskih si-



Slika 5.17: VCG kot trojka sočasnih signalov $(x(t), y(t), z(t))$ in predstavljen s prostorsko krivuljo $v(s)$. Tanjše so označene projekcije časovnih potekov na tri osnovne ortogonalne ravnine.

gnalov $(x(t), y(t), z(t))$ imenujemo vektorkardiogram (VCG). Potek VCG-ja lahko predstavimo kot sočasno predstavitev vseh treh kanalov ali tudi kot krivuljo v tridimenzionalnem prostoru (slika 5.17). Posamezni značilni deli EKG signalov se prikažejo kot zanke v prostoru. Najizrazitejša je zanka, ki ustreza največjim amplitudnim spremembam v EKG-ju, to je predelu QRS . Pri kliničnem raziskovanju potekov QRS zank se je izkazalo, da so te prostorske krivulje večinoma ravninske in da odstopanja od takega poteka kažejo na določeno bolezensko stanje.

⁷Glej tudi primer 2.5 na strani 45.

Iz diferencialne geometrije je znano, da lahko potek prostorske krivulje, ki je vsaj trikrat zvezno odvedljiva, natančno določimo s fleksijsko ukrivljenostjo $\zeta(s)$ in torzijsko ukrivljenostjo $\tau(s)$ [3]. Pri tem je

$$\zeta^2(s) = \langle \vec{v}''(s), \vec{v}''(s) \rangle, \quad (5.34)$$

$$\tau(s) = \frac{[\vec{v}'(s), \vec{v}''(s), \vec{v}'''(s)]}{\zeta(s)}, \quad (5.35)$$

kjer je

$$\vec{v}(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

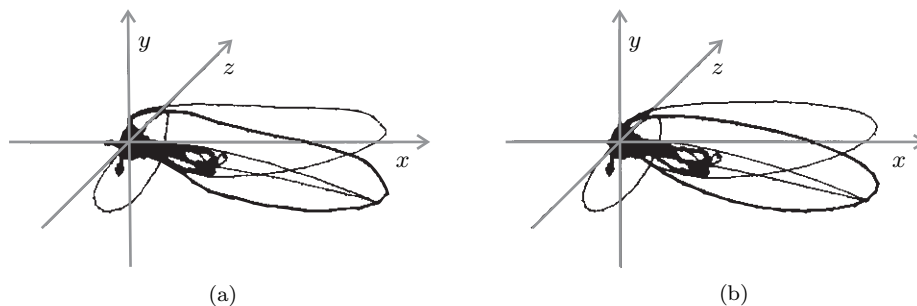
in s parameter ločne dolžine:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Če velja, da je $\tau(s) = 0$, je krivulja $\vec{v}(s)$ ravninska. Povprečna absolutna torzijska ukrivljenost

$$\frac{1}{L} \int_0^L |\tau(s)| ds,$$

kjer je L dolžina zanke, je zato lahko merodajen pokazatelj, v kolikšni meri je prostorska zanka ravninska.



Slika 5.18: (a) signal VCG in (b) njegov približek s prvimi 5-timi temeljnimi funkcijami ($k = 2$)

Rešitev

Želeli smo preveriti diagnostično vrednost tega parametra in izvedli meritve VCG signalov na pacientih s *hipertenzijo levega srčnega prekata* (LVH) in na kontrolni skupini. Pri določanju ocen za torzijsko ukrivljenost pa so nastopile težave, ker je potrebno, kot je to razvidno iz izrazov (5.34) in (5.35), na povzročnem signalu VCG oceniti vrednosti prvega, drugega in tretjega odvoda. Že samo zaradi napak, ki se jim ne moremo izogniti zaradi kvantizacijskega šuma⁸, je bil efekt poslabšanja

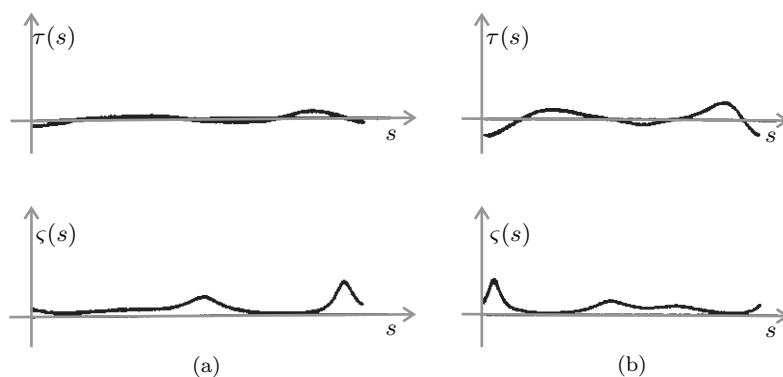
⁸Glej razdelek 9.2.1 na strani 223 v 9. poglavju.

razmerja signal/šum pri večkratnem odvajanju signalov tako izrazit, da so bili rezultati ocene torzijske ukrivljenosti povsem neuporabni.

Zaradi tega smo do ocen za ukrivljenosti $\zeta(s)$ in $\tau(s)$ prišli tako, da smo VCG signalu $\vec{v}(s)$ določili približek $\vec{v}^*(s)$, ki smo ga izrazili (slika 5.18) z nekaj prvimi kompleksnimi trigonometrijskimi funkcijami:

$$\vec{v}(s) \approx \vec{v}^*(s) = \sum_{n=-k}^k \vec{V}(n) e^{jn\omega_0 s}.$$

Ker so temeljne funkcije $e^{jn\omega_0 s}$ poljubnokrat zvezno odvedljive funkcije, smo odvode lahko določili analitično in se s tem izognili vplivu kvantizacijskega šuma. Na sliki 5.19 je prikazan potek na tak način določenih ocen ukrivljenosti $\zeta(s)$ in $\tau(s)$ za ravninsko in za zvito QRS zanko.



Slika 5.19: Ukrivljenosti $\zeta(s)$ in $\tau(s)$ za primer ravninske (a) in zvite (b) QRS zanke

5.4.8 Spekter integrala signala

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right) = -\frac{j}{\omega} F(\omega) \quad (5.36)$$

Izpeljava

Naj bo integrabilen signal $f(t)$ tak, da je zanj mogoče določiti Fourierovo transformacijo

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

in naj bo

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau.$$

Ker vemo, da sta integriranje in odvajanje inverzni transformaciji, in z upoštevanjem zveze (5.32), dobimo:

$$\int_{-\infty}^t \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau = f(t) \longleftrightarrow \frac{(j\omega F(\omega))}{j\omega} = F(\omega),$$

$$g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} F(\omega) = -\frac{j}{\omega} F(\omega).$$

Komentar

Nasprotno kot v prejšnjem razdelku 5.4.7, se situacija, ko visokofrekvenčni del v signalu predstavlja nekoristni signal – “šum”, po integriranju signala izboljša. Zato je integriranje v postopkih obdelave signalov ponavadi stabilen proces, ki razmerje signal/šum izboljša.

5.4.9 Podobnost med Fourierovo in inverzno Fourierovo transformacijo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= F(\omega), \\ \mathcal{F}(F(t)) &= 2\pi f(-\omega). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Izpeljava

Iz zapisa definicij Fourierove in inverzne Fourierove transformacije je razvidno, da gre za dve zelo podobni transformaciji, ki predstavljata povratno–enolično preslikavo med v splošnem kompleksnimi funkcijami realne spremenljivke:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega), \\ \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t). \end{aligned}$$

Funkcija $F(\omega)$ je kompleksna funkcija realne spremenljivke. Njen potek bi lahko predstavljal tudi potek hipotetičnega kompleksnega signala $F(t)$ v odvisnosti od časa t . Kakšen je frekvenčni potek signala $F(t)$?

$$\mathcal{F}(F(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{j(-\omega)t} dt \right) = 2\pi f(-\omega).$$

Komentar

Potek kompleksnega spektra signala $F(t)$ je torej le okoli ordinatne osi prezrcaljen in z 2π pomnožen potek signala $f(t)$. Rezultat, ki ga dobimo z dvakratnim zaporednim določanjem Fourierove transformacije, ni bistveno drugačen od poteka originalnega signala. Enako velja tudi za inverzno Fourierovo transformacijo.

5.4.10 Posplošena Fourierova transformacija

Dirichletovi pogoji so zadostni pogoji za eksistenco Fourierove in inverzne Fourierove transformacije. To pomeni, da je načelno možno določiti Fourierovo in inverzno

Fourierovo transformacijo tudi za kakšne signale, ki Dirichletovih pogojev ne izpolnjujejo. Izkaže se, da je absolutna integretilnost signala pogoj, ki ni nujno tudi potreben za eksistenco transformacij. Predvsem v takih primerih za določanje Fourierove transformacije uporabimo postopek, ki ga imenujemo tudi posplošena Fourierova transformacija.

Vzemimo, da želimo določiti Fourierovo transformacijo signala $f(t)$, ki ni absolutno integrabilen. Opazujemo drug signal $g(t)$, ki ga signalu $f(t)$ priredimo:

$$g(t) = f(t) \cdot w_\alpha(t) .$$

Pri tem signal $w_\alpha(t)$ izberemo tako, da pri določenih vrednostih parametra α njegove amplitude dovolj hitro konvergirajo proti nič, ko gremo s časom proti pozitivni ali negativni neskončnosti:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} w_\alpha(t) = 0 .$$

S tem zagotovimo absolutno integrabilnost signala $g(t)$ in posledično eksistenco njegove Fourierove transformacije $G(\omega)$:

$$g(t) \longleftrightarrow G(\omega) .$$

Poleg tega zahtevamo še

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} w_\alpha(t) = 1 ,$$

s čimer dosežemo, da je

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} g(t) = f(t) .$$

- V primeru, ko obstaja limita $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} G(\omega)$, to funkcijo imenujemo posplošena Fourierova transformacija $F(\omega)$ signala $f(t)$:

$$F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} G(\omega) .$$

Signal $w_\alpha(t)$ včasih imenujemo tudi okenska funkcija.

Primer 5.7

Primer signala $w_\alpha(t)$, ki izpolnjuje zgornje zahteve, je signal (slika 5.20):

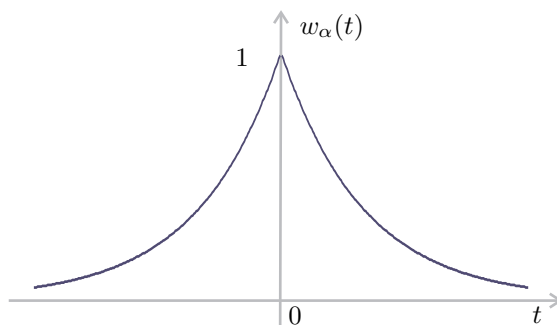
$$\begin{aligned} w_\alpha(t) &= e^{-\alpha|t|} , & \alpha > 0 , \\ \alpha_0 &= 0 . \end{aligned} \tag{5.38}$$

Primer 5.8

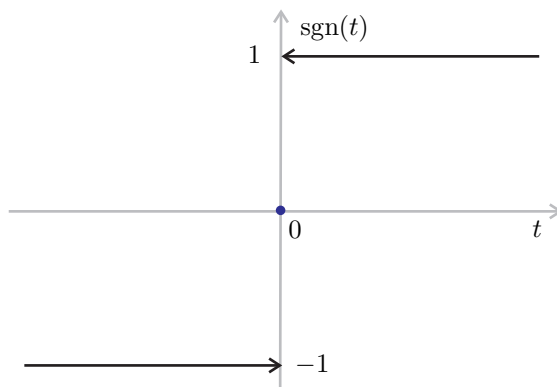
Določimo Fourierovo transformacijo signala⁹ $\text{sgn}(t)$ (slika 5.21), ki je določen z izrazom

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 , & t < 0 \\ 0 , & t = 0 \\ +1 , & t > 0 . \end{cases}$$

⁹Funkcijo $\text{sgn}(t)$ občajno imenujemo *signum*, ker njena vrednost odraža predznak vrednosti neodvisne spremenljivke.

Slika 5.20: Signal $w_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$ **Rešitev**

Signal $\text{sgn}(t)$ ni absolutno integrabilen, saj je skoraj povsod¹⁰ $|\text{sgn}(t)| = 1$. Za določitev frekvenčne predstavitve $\mathcal{F}(\text{sgn}(t))$ uporabimo postopek posplošene Fourierove transformacije.

Slika 5.21: Signal $\text{sgn}(t)$

Naj bo

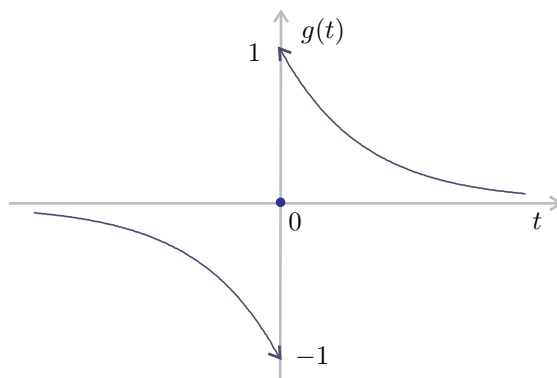
$$w_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}$$

signal, ki smo ga opisali že v (5.38) in

$$g(t) = \text{sgn}(t) \cdot w_\alpha(t).$$

Potek signala $g(t)$ je podan na sliki 5.22.

¹⁰Razen pri $t = 0$.

Slika 5.22: Signal $\text{sgn}(t) \cdot w_\alpha(t)$

Določimo njegovo Fourierovo transformacijo $G(\omega)$:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \\ &= - \frac{1}{\alpha - j\omega} e^{(\alpha - j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= - \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = -j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Fourierovo transformacijo signala $\text{sgn}(t)$ določimo tako, da poiščemo limitno vrednost spektra $G(\omega)$, ko gre vrednost parametra α proti 0:

$$\mathcal{F}(\text{sgn}(t)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-j \frac{2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right) = \begin{cases} -j \frac{2}{\omega}, & \omega \neq 0 \\ 0, & \omega = 0. \end{cases}$$

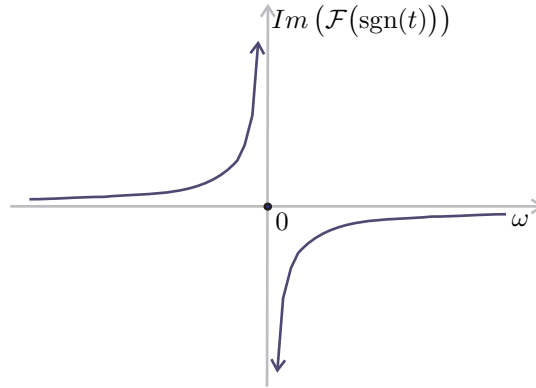
Ker je signal $\text{sgn}(t)$ liha funkcija, je njegov kompleksni spekter $\mathcal{F}(\text{sgn}(t))$ samo imaginaren in lih (slika 5.23).

5.5 Funkcija $\delta(t)$

5.5.1 Spektralna lastnost funkcije $\delta(t)$

Analizirajmo množico sodih pravokotnih impulzov $\{f_b(t)\}$ s skupno lastnostjo, da je njihov integral enak 1:

$$f_b(t) = \begin{cases} E, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2}, \quad E \cdot b = 1 \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$



Slika 5.23: Imaginarni del kompleksnega spektra $\mathcal{F}(\text{sgn}(t))$

V primeru 5.3 na strani 108 smo že določili kompleksni spekter sodega pravokotnega impulza:

$$F_b(\omega) = Eb \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} .$$

Poiščimo limito spektra $F_b(\omega)$, ko ožimo širino pravokotnega impulza proti 0:

$$\lim_{b \rightarrow 0} F_b(\omega) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} = \Delta(\omega) = 1 .$$

Limita eksistira in ima končno konstantno vrednost. V časovnem prostoru si limitni signal le simbolično predstavljamo kot infinitezimalno ozek pravokotni impulz s končno površino, ki ga grafično predstavimo z odebeljeno puščico ob času 0 (slika 5.24).

- Signal z $\delta(t)$ lastnostjo, da je njegov kompleksni spekter $\Delta(\omega)$ enak konstanti 1, imenujemo *funkcija delta*. Funkcijo $\delta(t)$ torej implicitno definiramo s spektralno lastnostjo:

$$\delta(t) \longleftrightarrow \Delta(\omega) = 1 . \quad (5.39)$$

Včasih funkciji $\delta(t)$ pravimo tudi *Diracov impulz* ali *enotin impulz*.

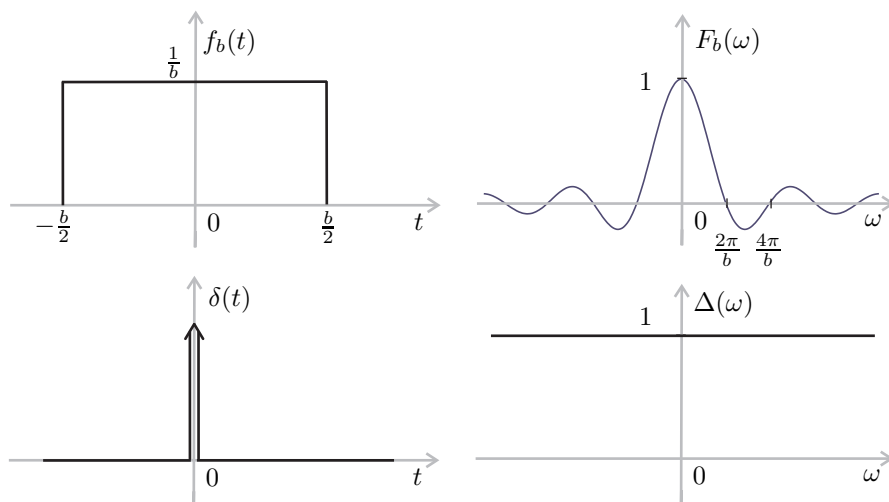
Funkcija $\delta(t)$ je realna in soda, saj je določena z limito realnih in sodih signalov:

$$\delta(t) = \delta(-t) . \quad (5.40)$$

Komentar

Funkcije $\delta(t)$ fizikalno ni mogoče udejaniti in ni energijski signal¹¹, se pa lahko signalu $\delta(t)$ z realizacijo čim krajšega in amplitudno čim večjega impulza približamo.

¹¹ $\lim_{b \rightarrow 0} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(\frac{1}{b}\right)^2 dt = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{1}{b} = \infty .$



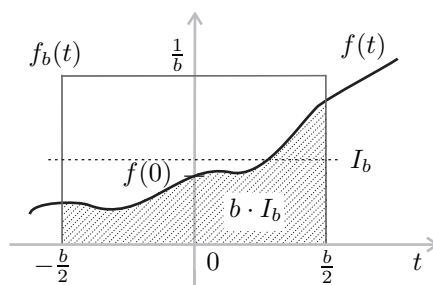
Slika 5.24: Signala $f_b(t)$ in $\delta(t)$ ter njuna spektra $F_b(\omega)$ in $\Delta(\omega)$

Matematični model funkcije $\delta(t)$ predstavlja mejnik vseh realnih fizikalnih signalov s posebno spektralno lastnostjo, da so v njem vsa sinusna nihanja enakomerno zastopana:

$$\Delta(\omega) = 1. \quad (5.41)$$

5.5.2 Tipalna lastnost funkcije $\delta(t)$

Naj bo $f(t)$ poljuben signal, ki je zvezen ob času $t = 0$, in $f_b(t)$ pravokotni impulz, definiran v prejšnjem razdelku (slika 5.25). Določimo vrednost integrala I_b produkta obeh signalov:



Slika 5.25: Zvezen signal $f(t)$, impulz $f_b(t)$, integral $b \cdot I_b$ njunega zmnožka ter vrednost I_b

$$I_b = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f_b(t) dt = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} f(t) dt .$$

Kot vidimo, je I_b dejansko povprečna vrednost signala $f(t)$ na intervalu $(-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2})$. Če širino impulza $f_b(t)$ ožimo, se ob predpostavki, da je signal $f(t)$ zvezna funkcija, vrednost povprečja I_b približuje vrednosti signala $f(0)$. Zato je

$$\lim_{b \rightarrow 0} I_b = f(0) .$$

- Tudi na ta način, smo prišli do nove implicitne definicije funkcije $\delta(t)$, ki jo imenujemo tudi "tipalna lastnost" funkcije $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) ,$$

ki jo splošneje – za poljuben časovni zamik – zapišemo kot

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) . \quad (5.42)$$

Obe implicitni definiciji funkcije $\delta(t)$ sta med seboj ekvivalentni.

5.5.3 Fourierova transformacija konstante

Vzemimo signal $f(t)$, ki je konstanten:

$$f(t) = a , a \in \mathbb{C} .$$

Tak signal ni absolutno integrabilen in zato ne izpolnjuje prvega Dirichletovega pogoja. Ali je zanj vseeno mogoče določiti Fourierovo transformacijo $\mathcal{F}(a)$?

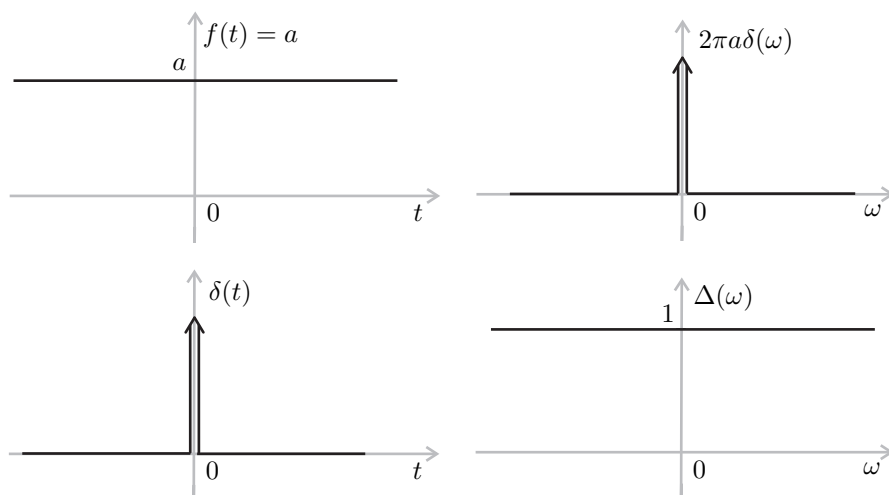
Izpeljava

Pomagajmo si z lastnostmi funkcije $\delta(t)$. Upoštevajmo (5.39) in to, da je $\sin \omega t$ liha funkcija:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \mathcal{F}^{-1}(\Delta(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t d\omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t d\omega . \end{aligned}$$

Iz primerjave zgornjega izraza z izrazom za izračun $\mathcal{F}(a)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot e^{-j\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t dt - ja \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega t dt \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t dt , \end{aligned}$$



Slika 5.26: Konstanta $f(t) = a$ in funkcija $\delta(t)$ ter njuna spektra $\mathcal{F}(a) = 2\pi a\delta(\omega)$ in $\Delta(\omega) = 1$

ugotovimo, da je:

$$\mathcal{F}(a) = 2\pi a\delta(\omega). \quad (5.43)$$

Do izraza (5.43) bi lahko prišli tudi z upoštevanjem lastnosti podobnosti (5.37) med \mathcal{F} in \mathcal{F}^{-1} .

Komentar

Konstanta predstavlja, z ozirom na funkcijo $\delta(t)$, drug mejnik (slika 5.26) vseh signalov, kot skrajno "len" signal, ki nikoli ne spremeni svoje vrednosti. Posledica tega je, da je spekter tega signala za vse od nič različne frekvence ω enak 0. Od nič različna neomejena vrednost pri frekvenci $\omega = 0$ je posledica lastnosti, da je

$$\mathcal{F}(a)|_{\omega=0} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-j\omega t} dt \right]_{\omega=0} = a \int_{-\infty}^{+\infty} dt = \infty.$$

5.6 Fourierova transformacija periodičnih signalov

Primer 5.9

Vzemimo signal $\cos \omega_0 t$. To je periodičen signal in zato ni absolutno integrabilen. Določimo njegovo transformacijo tako, da upoštevamo izraz za Fourierovo transformacijo konstante (5.43) in lastnost premika spektra po frekvenčni osi (5.27).

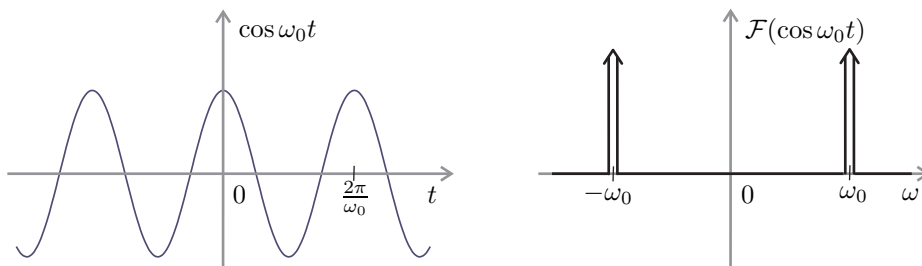
Rešitev

Velja:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) , \\ 1 \cdot e^{j\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) , \\ \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} &\longleftrightarrow \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) . \end{aligned}$$

Fourierova transformacija signala $\cos\omega_0 t$ (slika 5.27) je potemtakem

$$\mathcal{F}(\cos\omega_0 t) = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) . \quad (5.44)$$



Slika 5.27: Signal $\cos\omega_0 t$ in njegov spekter $\mathcal{F}(\cos\omega_0 t) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$

Komentar

Na sliki 5.27 in iz izraza (5.44) je razvidno, da je spekter signala $\cos\omega_0 t$ od nič različen le pri frekvenci ω_0 in njeni zrcalni frekvenci $-\omega_0$. Ker je $\cos\omega_0 t$ sinusno nihanje s frekvenco ω_0 , je to razumljivo. Neomejena vrednost spektra pri frekvencah ω_0 in $-\omega_0$ pa je posledica tega, da Fourierova transformacija po velikosti opisuje le gostoto amplitude. Ker je v tem primeru, ko gre za periodični signal, amplituda sinusnega nihanja, vsebovanega v signalu pri frekvencah ω_0 in $-\omega_0$, končna ($\frac{1}{2}$), je gostota amplitude ($\frac{1}{2d\omega}$) neomejena.

5.6.1 Fourierova transformacija periodičnih signalov, ki jih lahko zapišemo s Fourierovo vrsto

Naj bo $f_p(t)$ periodični signal s periodo T_0 , ki ga lahko zapišemo s Fourierovo vrsto:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)e^{jn\omega_0 t} , \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} .$$

Uporabimo razmišljanje, ki smo ga uporabili v primeru 5.9,

$$1 \cdot e^{jn\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - n\omega_0),$$

ter upoštevajmo linearnost Fourierove transformacije:

$$\mathcal{F}(f_p(t)) = F_p(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\delta(\omega - n\omega_0). \quad (5.45)$$

Komentar

Za vsak signal, ki ga lahko zapišemo s Fourierovo vrsto, lahko določimo tudi njegovo Fourierovo transformacijo. Fourierova transformacija periodičnega signala je v tem primeru predstavljena z neskončno vsoto produktov koeficientov Fourierove vrste $F(n)$ in enotinih impulzov pri zamikih $n\omega_0$. Pri tem je ω_0 osnovna harmonska frekvenca signala.

Primer 5.10

Določimo Fourierovo transformacijo periodične funkcije $\delta_{T_0}(t)$:

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0).$$

Rešitev

Iz (4.41) vemo, da velja

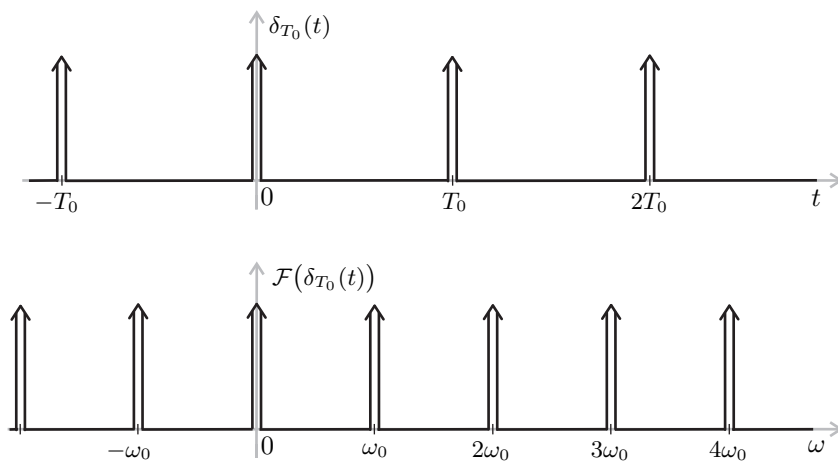
$$\delta_{T_0}(t) \longleftrightarrow \Delta(n) = \frac{1}{T_0}.$$

Po (5.45) določimo Fourierovo transformacijo $\delta_{T_0}(t)$:

$$\mathcal{F}(\delta_{T_0}(t)) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega). \quad (5.46)$$

Komentar

Fourierova transformacija periodične funkcije $\delta_{T_0}(t)$ je periodična funkcija $\delta_{\omega_0}(\omega)$, kar pomeni, da je periodična funkcija $\delta_{T_0}(t)$ invariantna na Fourierovo transformacijo. Enako smo ugotovili tudi za signal Ee^{-at^2} v primeru 5.2 na strani 104.



Slika 5.28: Periodična funkcija $\delta_{T_0}(t)$ in njena Fourierova transformacija $\mathcal{F}(\delta_{T_0}(t))$

Literatura

- [1] G. P. Tolstov, 9.8 Proof of the Fourier Integral Theorem, *Fourier Series*, Dover Publications, Inc., New York, 1976, str. 188.
- [2] F. Mihelič, M. Vezjak, L. Gyergyek in ostali: Determination of Torsion and Curvature of Spatial QRS Loop, *MEDINFO-83, Part 2*, van Bemmel/Ball/Wigertz, North-Holland, 1983, str. 689–692.
- [3] I. Vidav: 5. Ukrivljenost prostorskih krivulj, *Višja matematika II*, izd. I. Vidav, DZS, Ljubljana 1975, str. 347–351.

6. Korelacija in konvolucija neperiodičnih signalov

6.1 Korelacija neperiodičnih signalov

Podobno kot pri periodičnih signalih (glej razdelek 4.1) definiramo korelacijo tudi pri neperiodičnih signalih. *Korelacija* $\varphi_{ij}(\tau)$ neperiodičnih signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ je določena z izrazom

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt .$$

Če sta signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ energijska signala, obstaja $\varphi_{ij}(\tau)$ za vsak τ in je neperiodičen signal.

Vsi energijski neperiodični signali tvorijo vektorski prostor, saj je vsota dveh energijskih signalov zopet energijski signal in produkt energijskega signala s skalarjem (kompleksno ali realno konstanto) tudi energijski signal. Podobno, kot smo o tem že govorili v poglavjih 2 in 4, pa tudi za ta vektorski prostor velja, da lahko v njem definiramo skalarni produkt:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt . \quad (6.1)$$

Iz zveze 6.1 sledi, da lahko korelacijo neperiodičnih signalov predstavimo kot skalarni produkt:

$$\varphi_{ij}(\tau) = \langle f_j(t + \tau), f_i(t) \rangle . \quad (6.2)$$

Kot pri korelaciji periodičnih signalov, ločimo med dvema možnostima.

Če je $f_i(t) \neq f_j(t)$, korelacijo $\varphi_{ij}(\tau)$ imenujemo *križna korelacija*,

ko pa je $f_i(t) = f_j(t)$, $\varphi_{ii}(\tau)$ imenujemo *avtokorelacija*.

6.1.1 Lastnosti avtokorelacije

$$\varphi_{ii}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt \quad (6.3)$$

6.1.1.1 Hermitova simetrija

$$\varphi_{ii}(-\tau) = \overline{\varphi_{ii}(\tau)} \quad (6.4)$$

Izpeljava

Zvezo izpeljemo podobno kot za periodične signale. Glej podrazdelek 4.1.2.2 na strani 75.

Posledica

Če je signal $f_i(t)$ realen ($f_i(t) \in \mathbb{R}$), potem je tudi avtokorelacija φ_{ii} realna in zato

$$\varphi_{ii}(-\tau) = \varphi_{ii}(\tau) \quad (6.5)$$

V tem primeru je torej avtokorelacija soda funkcija.

Komentar

Lastnost Hermitove simetrije dejansko pomeni, da je potek avtokorelacije natanko določen določen z njenimi vrednostmi na pozitivni (ali negativni) strani časovne osi.

6.1.1.2 Energija signala $f_i(t)$

$$\varphi_{ii}(0) = E_{f_i} \quad (6.6)$$

Izpeljava

Vstavimo $\tau = 0$ v izraz, ki določa avtokorelacijo:

$$\varphi_{ii}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_i(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(t)|^2 dt = E_{f_i} \quad .$$

Vrednost avtokorelacije pri $\tau = 0$ je enaka energiji signala $f_i(t)$.

6.1.1.3 Frekvenčna predstavitev $\varphi_{ii}(\tau)$

$$\varphi_{ii}(\tau) \leftrightarrow \phi_{ii}(\omega) = |F_i(\omega)|^2 \quad (6.7)$$

Izpeljava

Izpeljimo povezavo med spektroma $F_i(\omega)$ in $\phi_{ii}(\omega)$, tako da določimo inverzno Fourierovo transformacijo spektra $|F_i(\omega)|^2$. Pri tem upoštevajmo, da je

$$\overline{F_i(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} e^{j\omega t} dt$$

in kasneje zamenjajmo vrstni red integriranja:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(|F_i(\omega)|^2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\omega) \overline{F_i(\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} e^{j\omega t} dt \right\} e^{j\omega\tau} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_i(t+\tau) dt = \varphi_{ii}(\tau). \end{aligned}$$

Posledice

Zaradi lastnosti $\phi_{ii}(\omega) = |F_i(\omega)|^2$ je kompleksni spekter $\phi_{ii}(\omega)$ realen in nenegativen in zato:

$$\begin{aligned} |\phi_{ii}(\omega)| &= \phi_{ii}(\omega), \\ \Theta_{ii}(\omega) &= 0. \end{aligned}$$

- Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je neperiodičen signal s faznim spektrom, ki je enak 0.
- Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je določena le z $|F_i(\omega)|$ in je zato neodvisna od poteka faznega spektra $\Theta_i(\omega)$ signala $f_i(t)$.

To lastnost lahko s pridom uporabimo takrat, ko želimo iz signala $f_i(t)$ izločiti vpliv, ki ga ima na potek signala njegov fazni spekter. Hkrati pa neodvisnost avtokorelacije od faznega spektra izvirnega signala pomeni tudi, da preslikava

$$f_i(t) \longrightarrow \varphi_{ii}(\tau)$$

ni povratno-enolična. Enako kot za periodične signale tudi v tem primeru velja, da vsi neperiodični signali, ki se med sabo ujemaajo v spektru amplitudne gostote, določajo enako avtokorelacijsko funkcijo.

Poseben primer te lastnosti sta neperiodična signala v relaciji

$$f_j(t) = f_i(t - t_0).$$

Kot smo pokazali v (5.25), sta spektra amplitudne gostote dveh takih signalov enaka $|F_i(\omega)| = |F_j(\omega)|$ in je zato

$$\varphi_{jj}(\tau) = \varphi_{ii}(\tau).$$

Zapišimo $\varphi_{ii}(\tau)$ kot inverzno Fourierovo transformacijo njenega kompleksnega spektra $\phi_{ii}(\omega)$,

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega ,$$

in pogledjmo, kaj dobimo, če je $\tau = 0$:

$$\varphi_{ii}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{ii}(\omega) d\omega . \quad (6.8)$$

- Kot sledi iz (6.6), vrednost $\varphi_{ii}(0)$ predstavlja ravno energijo signala $f_i(t)$. Enačbo (6.8) imenujemo *Parsevalova enačba* za neperiodične signale.

Od tu razberemo tudi fizikalni pomen kompleksnega spektra avtokorelacije. Zaradi nenegativnosti spektra $\phi_{ii}(\omega)$ in ker je njegov integral preko cele frekvenčne osi (6.8) ravno energija signala $f_i(t)$, lahko

$$\frac{1}{2\pi} \phi_{ii}(\omega) d\omega$$

interpretiramo kot del energije, ki je vsebovan v signalu $f_i(t)$ pri frekvenci ω . Če energijo delimo s širino frekvenčnega intervala $d\omega$, kjer je določena, tak kvocient predstavlja energijsko gostoto:

$$\frac{\frac{1}{2\pi} \phi_{ii}(\omega) d\omega}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \phi_{ii}(\omega) .$$

Vpliv konstantnega faktorja $\frac{1}{2\pi}$ tu nima bistvenega pomena. Zato običajno kar sam spekter $\phi_{ii}(\omega)$ imenujemo *spekter energijske gostote* signala $f_i(t)$. Spekter $\phi_{ii}(\omega)$ pove, kako je v signalu $f_i(t)$ porazdeljena energija v odvisnosti od frekvence ω .

6.1.1.4 Maksimalnost

$$\varphi_{ii}(0) \geq |\varphi_{ii}(\tau)| \quad (6.9)$$

Izpeljava

Ker neperiodični energijski signali tvorijo vektorski prostor, v katerem lahko določimo skalarni produkt (6.1), za dokaz enako kot pri periodičnih signalih¹ uporabimo Schwartzovo neenačbo:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \leq \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle .$$

¹Glej podrazdelek 4.1.2.7 na strani 78.

6.1.1.5 Zveznost

Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ je zvezna funkcija, če je le energijski signal $f_i(t)$ omejena in vsaj odsekoma zvezna funkcija.

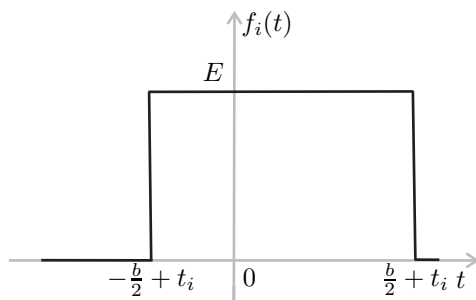
Utemeljitev

Zgornji sklep utemeljimo podobno kot pri periodičnih signalih. Avtokorelacija je zvezna funkcija, ker je definirana z določenim integralom integranda, ki je omejena in odsekoma zvezna funkcija.

Primer 6.1

Signal $f_i(t)$ (slika 6.1) naj bo pravokotni impulz širine b in višine E zamaknjen iz sode lege za časovni zamik t_i :

$$f_i(t) = \begin{cases} E, & -\frac{b}{2} + t_i < t < +\frac{b}{2} + t_i \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$



Slika 6.1: Signal $f_i(t)$

Določimo njegovo avtokorelacijo $\varphi_{ii}(\tau)$ in spekter energijske gostote $\phi_{ii}(\omega)$ ter narišimo njuna poteka.

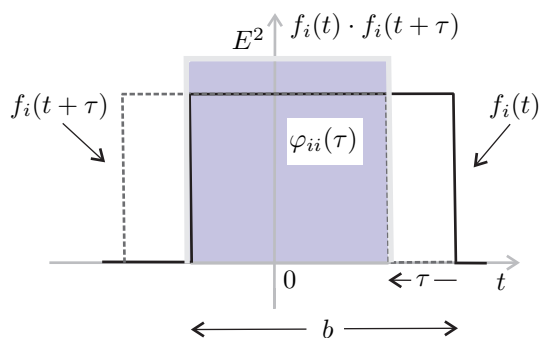
Rešitev

Ker je signal $f_i(t)$ realen, je

$$\varphi_{ii}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)f_i(t + \tau)dt.$$

Vzemimo $0 < \tau < b$. V tem primeru je signal $f_i(t + \tau)$ zamaknjen v levo glede na signal $f_i(t)$, da se njuna neničelna dela še delno prekrivata (slika 6.2). S slike lahko razberemo, da je v tem primeru

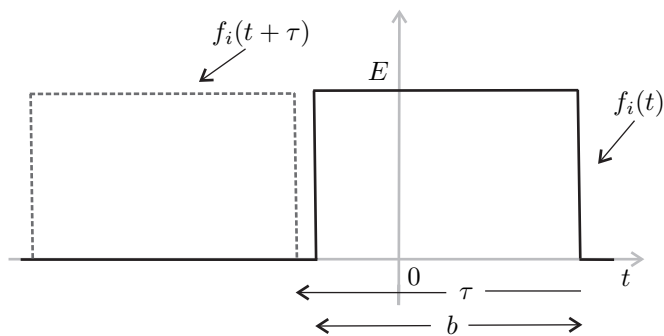
$$\varphi_{ii}(\tau) = E^2(b - \tau).$$



Slika 6.2: Signala $f_i(t)$ in $f_i(t + \tau)$ ter njun zmnožek pri $0 < \tau < b$. Površina sivo označenega pravokotnika predstavlja vrednost $\varphi_{ii}(\tau)$.

Če je $\tau > b$ (slika 6.3), je $f_i(t)f_i(t + \tau) = 0$ in zato tudi

$$\varphi_{ii}(\tau) = 0 .$$



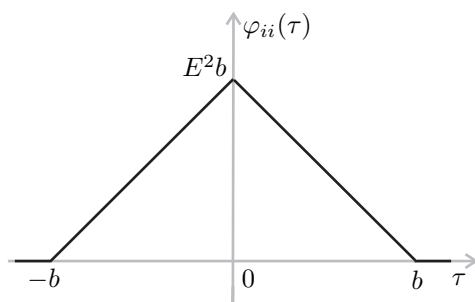
Slika 6.3: Signala $f_i(t)$ in $f_i(t + \tau)$ pri $\tau > b$

S tem smo določili vrednosti $\varphi_{ii}(\tau)$ za vse pozitivne τ . Ker je avtokorelacija realnega signala soda funkcija (6.5), lahko od tod z zrcaljenjem preko ordinatne osi določimo njen potek tudi za negativne τ (slika 6.4):

$$\varphi_{ii}(\tau) = \begin{cases} E^2(b - |\tau|) , & -b < \tau < +b \\ 0 & , \quad \text{drugod} . \end{cases}$$

Iz slike 6.4 je razvidno tudi:

- potek $\varphi_{ii}(\tau)$ ni odvisen od zamika t_i ,
- $\varphi_{ii}(0)$ je največja vrednost avtokorelacije in
- $\varphi_{ii}(\tau)$ je zvezna, čeprav je signal $f_i(t)$ le odsekoma zvezen.



Slika 6.4: Avtokorelacija $\varphi_{ii}(\tau)$ signala $f_i(t)$

Poglejmo še frekvenčno predstavitev avtokorelacije: $\varphi_{ii}(\tau)$.

$$\phi_{ii}(\omega) = \mathcal{F}(\varphi_{ii}(\tau)) .$$

Iz lastnosti (6.7) sledi, da je

$$\phi_{ii}(\omega) = |F_i(\omega)|^2 .$$

$|F_i(\omega)|$ signala $f_i(t)$ smo že določili v primeru 5.4 na strani 109:

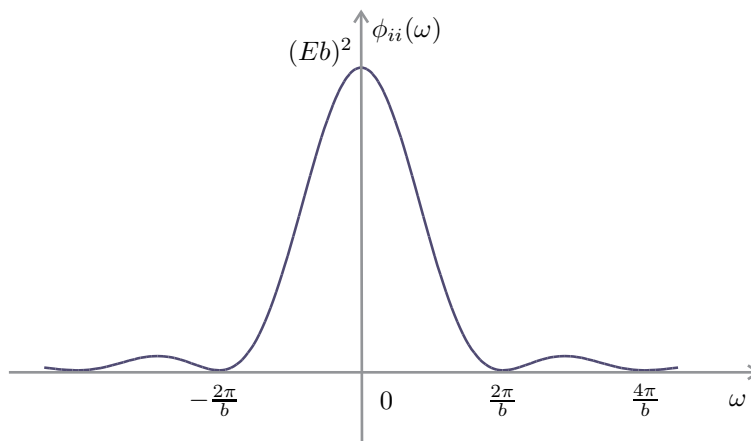
$$|F_i(\omega)| = Eb \left| \frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} \right| .$$

Spekter energijske gostote $\phi_{ii}(\omega)$ je zato (glej tudi sliko 6.5) enak

$$\phi_{ii}(\omega) = (Eb)^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega b}{2}}{\frac{\omega b}{2}} \right)^2 .$$

6.1.2 Lastnosti križne korelacije

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_j(t + \tau) dt \quad (6.10)$$



Slika 6.5: Kompleksni spekter $\phi_{ii}(\omega)$ avtokorelacije $\varphi_{ii}(\tau)$

6.1.2.1 Antisimetričnost

$$\varphi_{ji}(\tau) = \overline{\varphi_{ij}(-\tau)} \quad (6.11)$$

Izpeljava

To lastnost izpeljemo na podoben način, kot smo to naredili pri periodičnih signalih v podrazdelku 4.1.1.4 na strani 72.

Posledica

V primeru, ko sta signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ realna, se lastnost še poenostavi:

$$\varphi_{ji}(\tau) = \varphi_{ij}(-\tau) . \quad (6.12)$$

Komentar

Z zamenjavo vrstnega reda signalov pri določanju križne korelacije se potek križne korelacije le prezrcali. Realni del preko ordinatne osi, imaginarni del pa skozi koordinatno izhodišče.

6.1.2.2 Frekvenčna predstavitev $\varphi_{ij}(\tau)$

$$\varphi_{ij}(\tau) \leftrightarrow \phi_{ij}(\omega) = \overline{F_i(\omega)} \cdot F_j(\omega) \quad (6.13)$$

Izpeljava

Podobno kot pri avtokorelaciji izpeljimo povezavo med spektroma $F_i(\omega)$ in $F_j(\omega)$ ter $\phi_{ij}(\omega)$, tako da določimo inverzno Fourierovo transformacijo produkta spektrov $\overline{F_i(\omega)} \cdot F_j(\omega)$. Pri tem upoštevajmo, da je

$$\overline{F_i(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} e^{j\omega t} dt$$

in kasneje zamenjajmo vrstni red integriranja:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}(\overline{F_i(\omega)} \cdot F_j(\omega)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{F_i(\omega)} F_j(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} e^{j\omega t} dt \right\} e^{j\omega\tau} d\omega \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(\omega) e^{j\omega(t+\tau)} d\omega \right\} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f_i(t)} f_j(t+\tau) dt = \varphi_{ij}(\tau) .
 \end{aligned}$$

6.1.2.3 Podobnost med signaloma $f_i(t)$ in $f_j(t)$

Skalarni produkt je relacija, ki v vektorskem prostoru, kjer je definirana, opisuje medsebojno usmerjenost vektorjev. Velikost običajnega skalarnega produkta v ravnini je odvisna od ostrega kota, med vektorjema in od njune velikosti:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta .$$

Če sledimo spreminjanju vrednosti skalarnega produkta le glede na medsebojno usmerjenost vektorjev, ima skalarni produkt absolutno največjo vrednost, ko sta vektorja vzporedna, in vrednost 0, ko sta vektorja pravokotna.

Kot smo videli v (6.2) lahko križno korelacijo predstavimo kot skalarni produkt signalov $f_j(t+\tau)$ in $f_i(t)$. Kako bi lahko velikost križne korelacije interpretirali glede na zgornji razmislek?

Če privzamemo interpretacijo, da je vrednost skalarnega produkta merilo, kako "podobno" sta dva vektorja "usmerjena", lahko križno korelacijo signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ razumemo kot merilo za medsebojno podobnost signalov v odvisnosti od časovnega zamika τ drugega signala proti prvemu. Ker je pripis "smeri" signalu precej abstrakten, opis križne korelacije signalov kot merilo za podobnost signalov izpeljimo še iz mere za razdaljo, ki jo implicira skalarni produkt.

Vsak vektorski prostor, v katerem je definiran skalarni produkt, je tudi metričen vektorski prostor. Razdaljo med vektorjema lahko vedno definiramo s skalarnim produktom:

$$d^2(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle .$$

Razčlenimo zgornjo zvezo:

$$\begin{aligned}
 d^2(\vec{x}, \vec{y}) &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle \\
 &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \overline{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \\
 &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - 2\mathcal{R}e(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) .
 \end{aligned}$$

Če za vektorja \vec{x} in \vec{y} vzamemo realna signala $f_j(t + \tau)$ in $f_i(t)$, iz (6.2) in (6.6) dobimo

$$d^2(f_j(t + \tau), f_i(t)) = \varphi_{jj}(0) + \varphi_{ii}(0) - 2\mathcal{R}e(\varphi_{ij}(\tau)) . \quad (6.14)$$

Ker je (6.14) izraz za kvadrat razdalje, je vedno nenegativen. Pozitivna pa sta tudi člena $\varphi_{ii}(0)$ in $\varphi_{jj}(0)$ na desni strani enačbe, saj predstavljata energiji signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$. Iz enačbe (6.14) torej sledi naslednji sklep:

Velika razdalja med signaloma $f_i(t)$ in $f_j(t)$ pomeni, da bo vrednost realnega dela njune križne korelacije $\varphi_{ij}(\tau)$ majhna in obratno.

Ta sklep dodatno utemelji interpretacijo, da lahko križno korelacijo med signali uporabimo kot mero za njihovo podobnost, v smislu, da večja podobnost med signaloma pomeni hkrati manjšo razdaljo med njima in obratno.

Pri obdelavi signalov zato križno korelacijo velikokrat uporabimo za identifikacijo določenih tipov signalov, tako da poiščemo največje vrednosti križnih korelacij neznanega signala s prototipi signalov, ki pripadajo različnim skupinam signalov. Neznani signal potem pripišemo tisti skupini signalov, za katero je maksimum križne korelacije s prototipnim signalom največji. Križno korelacijo pa lahko uporabimo tudi pri poravnavi dveh signalov, tako da poiščemo zamik τ , pri katerem je vrednost križne korelacije največja (primer 6.3).

6.1.2.4 Zveznost

Križna korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ je zvezna funkcija, če sta le energijska signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ omejeni in vsaj odsekoma zvezni funkciji.

Utemeljitev

Zgornji sklep utemeljimo podobno kot pri avtokorelaciji.

Primer 6.2

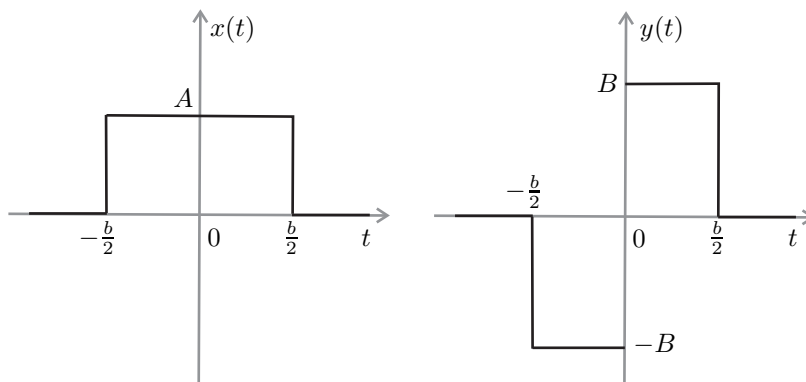
Za signala $x(t)$ in $y(t)$ (slika 6.6) določimo njuni križni korelaciji $\varphi_{xy}(\tau)$ in $\varphi_{yx}(\tau)$ in skicirajmo njun potek:

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod,} \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} -B, & -\frac{b}{2} < t \leq 0 \\ +B, & 0 < t \leq +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$

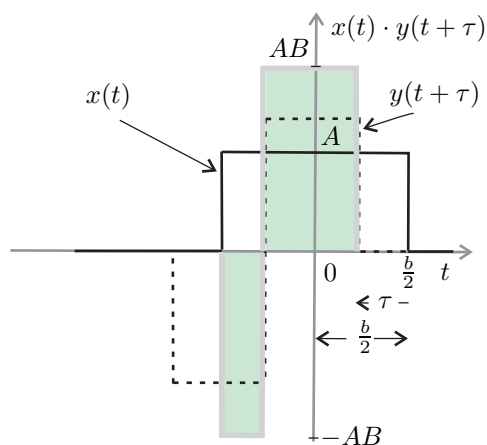
Rešitev

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t + \tau)dt .$$

Slika 6.6: Potek signalov $x(t)$ in $y(t)$

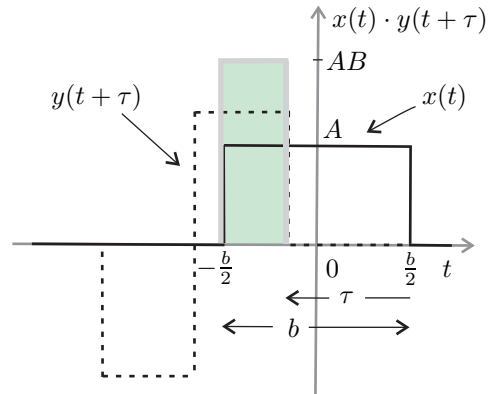
Vzemimo najprej, da je τ pozitiven in manjši od $\frac{b}{2}$ ($0 < \tau < \frac{b}{2}$). Situacijo ponazarja slika 6.7. Integral zmnožka $x(t)y(t+\tau)$ je enak vsoti ploščin dveh pravokotnikov:

$$\varphi_{xy}(\tau) = AB \cdot \frac{b}{2} - AB \cdot \left(\frac{b}{2} - \tau\right) = AB \cdot \tau.$$

Slika 6.7: Potek signalov $x(t)$ in $y(t+\tau)$ ter $x(t) \cdot y(t+\tau)$ za $0 < \tau < \frac{b}{2}$.

Če je $\frac{b}{2} < \tau < b$ (slika 6.8), je

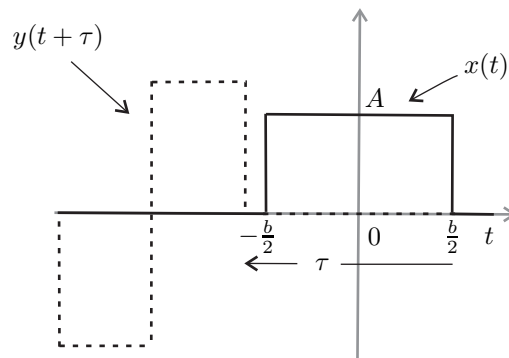
$$\varphi_{xy}(\tau) = AB \cdot (b - \tau).$$



Slika 6.8: Potek signalov $x(t)$ in $y(t + \tau)$ ter $x(t) \cdot y(t + \tau)$ za $\frac{b}{2} < \tau < b$.

Ko pa je $\tau > b$ (slika 6.9), je $x(t)y(t + \tau) = 0$ in zato

$$\varphi_{xy}(\tau) = 0.$$



Slika 6.9: Potek signalov $x(t)$ in $y(t + \tau)$ za $\tau > b$.

Za določitev vrednosti $\varphi_{xy}(\tau)$ za negativne τ lahko upoštevamo simetrije signalov $x(t)$ in $y(t)$:

$$x(-t) = x(t) \quad \text{in} \quad y(-t) = -y(t)$$

ter uporabimo naslednji sklep:

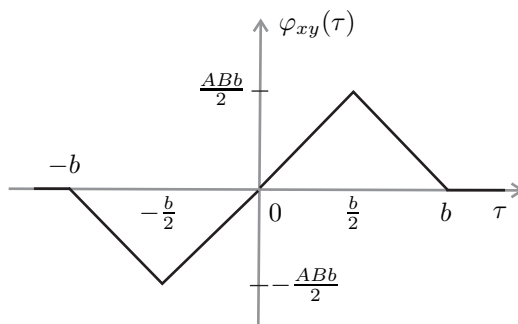
$$\begin{array}{llll} x(t) & \longleftrightarrow & X(\omega) = C(\omega) \in \mathbb{R} & \text{in} & C(-\omega) = C(\omega) , \\ y(t) & \longleftrightarrow & Y(\omega) = jD(\omega) \in \mathbb{I} & \text{in} & D(-\omega) = -D(\omega) , \\ \varphi_{xy}(\tau) & \longleftrightarrow & \phi_{xy}(\omega) = jC(\omega)D(\omega) \in \mathbb{I} & \text{in} & \phi_{xy}(-\omega) = -\phi_{xy}(\omega) . \end{array}$$

Ker je kompleksni spekter $\phi_{xy}(\omega)$ liha imaginarna funkcija, je $\varphi_{xy}(\tau)$ liha funkcija:

$$\varphi_{xy}(-\tau) = -\varphi_{xy}(\tau) .$$

Vrednosti križne korelacije $\varphi_{xy}(\tau)$ so zato za vse τ (slika 6.10) določene z

$$\varphi_{xy}(\tau) = \begin{cases} -AB \cdot (b + \tau) , & -b < \tau \leq -\frac{b}{2} \\ AB \cdot \tau , & -\frac{b}{2} < \tau \leq +\frac{b}{2} \\ AB \cdot (b - \tau) , & +\frac{b}{2} < \tau < +b \\ 0 , & \text{drugod .} \end{cases}$$

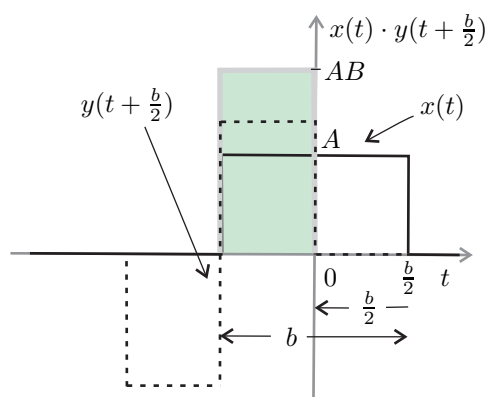


Slika 6.10: Potek križne korelacije $\varphi_{xy}(\tau)$

$\varphi_{xy}(\tau)$ je zvezna funkcija. Maksimum doseže pri $\tau = \frac{b}{2}$. Če interpretiramo križno korelacijo kot mero podobnosti, to pomeni, da sta si signala $x(t)$ in $y(t)$ najbolj podobna, ko zamaknemo signal $y(t)$ za $\frac{b}{2}$ v levo.

Situacijo ponazarja slika 6.11. Zavedati se moramo, da s križno korelacijo ocenjujemo podobnost signalov $x(t)$ in $y(t + \tau)$ povsod tam, kjer sta signala hkrati različna od 0. V primeru, ko je $\tau = \frac{b}{2}$, je to časovni interval $-\frac{b}{2} < t \leq 0$. V tem primeru tako pri signalu $x(t)$ kot tudi pri signalu $y(t + \tau)$ dobimo pozitiven pravokotni impulz, kar za pozitivne vrednosti zamika τ , ki so manjše od $\frac{b}{2}$ ne velja. Če je $\frac{b}{2} \leq \tau \leq b$, se na intervalu, kjer sta signala hkrati različna od 0, ta situacija ohranja. Z večanjem zamika τ pa se hkrati krajša širina impulzov in s tem zmanjša njihova energija, ki tudi vpliva na velikost korelacije. Ta pri zamiku $\tau = b$ doseže vrednost 0. Liho simetričen potek korelacije $\varphi_{xy}(\tau)$ dobimo za negativne vrednosti parametra τ . Negativna vrednost korelacije pri tem pomeni, da gre sicer

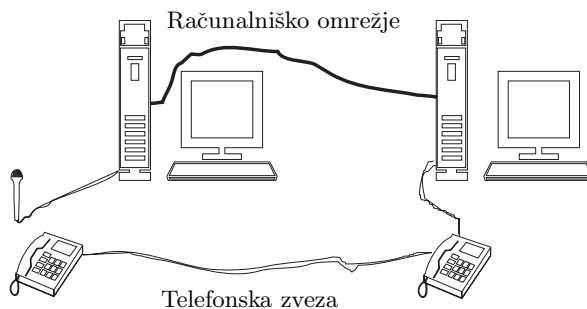
za podobne vendar "nasprotno usmerjene" signale. $\varphi_{xy}(\tau)$ doseže minimum pri $\tau = -\frac{b}{2}$, to je, ko na intervalu $0 \leq t \leq \frac{b}{2}$ primerjamo dva pravokotna, nasprotno predznačena impulza.



Slika 6.11: Potek signalov $x(t)$ in $y(t + \frac{b}{2})$ ter $x(t) \cdot y(t + \frac{b}{2})$

Primer 6.3

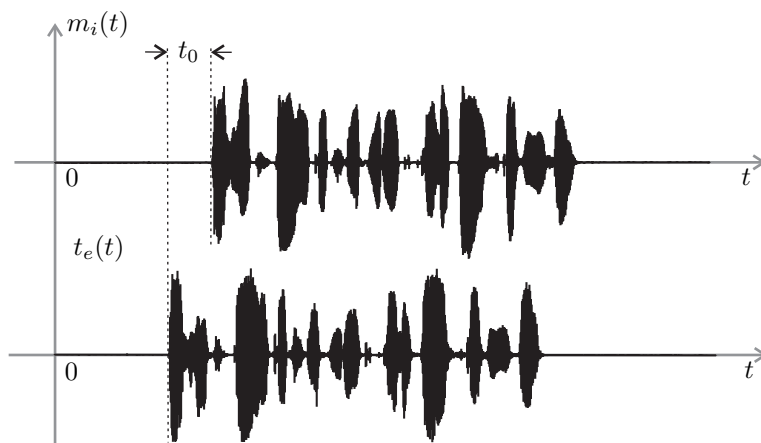
Poglejmo si praktičen zgled uporabe križne korelacije neperiodičnih signalov pri določanju časovne poravnave dveh signalov. Pri zbiranju govornih posnetkov za korpus govornih podatkov, ki smo ga kasneje uporabljali za učenje in preizkušanje sistemov za samodejno razpoznavanje govora [1], smo se odločili, da bomo podatke zbirali tako, da bomo govor snemali hkrati preko telefonske zveze in preko kvalitetejnega sistema za zajemanje akustičnih signalov. Na ta način smo želeli pridobiti vzporedni korpus podatkov, ki bo omogočal študij vpliva telefonske povezave na uspešnost samodejnega razpoznavanja govora.



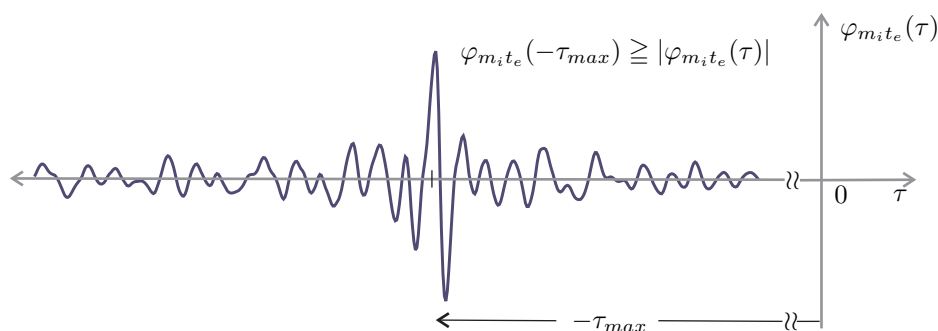
Slika 6.12: Arhitektura sistema za vzporedno zajemanje govornih podatkov

Arhitektura sistema za zajemanje podatkov je prikazana na sliki 6.12. Ker smo signale digitalizirali na dveh ločenih računalniških sistemih, je prišlo do problema sinhronizacije posnetkov. V digitalnih zapisih posameznih posnetkov so se pojavljali nepredvidljivi časovni zamiki (slika 6.13), ki smo jih zaradi primerljivo-

sti obeh podatkovnih zbirk in kasnejše primerljivosti eksperimentalnih rezultatov želeli izločiti oziroma posamezne vzporedne zapise med sabo časovno sinhronizirati.



Slika 6.13: Poteka govornega signala $m_i(t)$ in $t_e(t)$, zajetega preko mikrofonskega in telefonskega vmesnika. t_0 je časovni zamik med posnetkoma.



Slika 6.14: Križna korelacija $\varphi_{m_i t_e}(\tau)$ med mikrofonskim in telefonskim signalom. S τ_{max} je označen časovni zamik τ , pri katerem križna korelacija $\varphi_{m_i t_e}(\tau)$ doseže maksimum. $\tau_{max} \approx t_0$.

Rešitev

Detekcija začetka govora na osnovi povečane energije in podobnih parametrov se je izkazala za nezanesljivo zaradi vpliva šuma in možnosti, da se na začetku govora pojavijo glasovi z relativno majhno glasnostjo. Tako na primer glasova f in h , ki ju izgovorimo v osami, zlahka zamenjamo z zvokom, ki ga ustvarimo z malo močnejšim dihanjem ali kakšno drugo šibko izraženo akustično motnjo.

Z uporabo križne korelacije obeh hkrati zajetih signalov pa smo lahko – zaradi njene globalne odvisnosti od poteka obeh signalov – zelo zanesljivo izvedli poravnavo. Časovni zamik τ_{max} , kjer je vrednost korelacije največja (slika 6.14), potrebno zakasnitev za uskladitev poteka signalov zelo natančno določa.

6.2 Konvolucija neperiodičnih signalov

Konvolucija $\varrho_{ij}(\tau)$ neperiodičnih signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ je definirana z izrazom

$$\varrho_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t)f_j(\tau - t)dt. \quad (6.15)$$

Izraz (6.15) velikokrat simbolično zapišemo kot

$$\varrho_{ij}(\tau) = f_i(\tau) * f_j(\tau).$$

Konvolucija $\varrho_{ij}(\tau)$ neperiodičnih signalov je določena za vsak τ v primeru, ko sta $f_i(t)$ in $f_j(t)$ energijska signala, in je neperiodičen signal.

6.2.1 Lastnosti konvolucije neperiodičnih signalov

6.2.1.1 Premik po časovni osi

$$\varrho_{ij}(\tau - t_0) = f_i(\tau - t_0) * f_j(\tau) \quad (6.16)$$

Izpeljava

Ko v definicijsko enačbo (6.15) za prvi člen vstavimo signal $f_i(\tau - t_0)$ in uvedemo novo integracijsko spremenljivko $t' = t - t_0$, dobimo:

$$\begin{aligned} f_i(\tau - t_0) * f_j(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t - t_0)f_j(\tau - t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t')f_j(\tau - (t' + t_0)) dt' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t')f_j((\tau - t_0) - t')dt' = \varrho_{ij}(\tau - t_0). \end{aligned}$$

6.2.1.2 Simetričnost

$$\varrho_{ij}(\tau) = f_i(\tau) * f_j(\tau) = f_j(\tau) * f_i(\tau) = \varrho_{ji}(\tau) \quad (6.17)$$

Izpeljava

Zvezo izpeljemo na podoben način, kot smo to storili za periodične signale. Glej podrazdelek (4.2.1.3) na strani 86.

6.2.1.3 Frekvenčna predstavitev $\varrho_{ij}(\tau)$

$$\varrho_{ij}(\tau) \longleftrightarrow R_{ij}(\omega) = F_i(\omega) \cdot F_j(\omega) \quad (6.18)$$

Izpeljava

Izhajajmo iz definicije Fourierove transformacije (5.7) in konvolucije (6.15) ter zamenjajmo vrstni red integriranja po t in τ :

$$\begin{aligned} R_{ij}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{ij}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) f_j(\tau - t) dt \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} dt. \end{aligned}$$

Ko uvedemo novo spremenljivko $s = \tau - t$, dobimo:

$$\begin{aligned} R_{ij}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(s) e^{-j\omega(s+t)} ds \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(s) e^{-j\omega s} ds \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= F_j(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) e^{-j\omega t} dt = F_i(\omega) \cdot F_j(\omega). \end{aligned}$$

6.2.1.4 Frekvenčna predstavitev zmnožka $f_i(t) \cdot f_j(t)$

$$f_i(t) \cdot f_j(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_i(\omega) * F_j(\omega) \quad (6.19)$$

Izpeljava

Zapišimo izraz za $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi} F_i(\omega) * F_j(\omega)\right)$, zamenjajmo vrstni red integriranja in uvedemo novo spremenljivko $s = \omega - u$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi} F_i(\omega) * F_j(\omega)\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(u) F_j(\omega - u) du \right\} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(u) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(\omega - u) e^{j\omega t} d\omega \right\} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(u) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_j(s) e^{jst} ds \right\} e^{jut} du \\ &= f_i(t) \cdot f_j(t). \end{aligned}$$

6.2.1.5 Zveznost

Konvolucija $\varrho_{ij}(\tau)$ je zvezna funkcija, če sta le energijska signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ omejeni in vsaj odsekoma zvezni funkciji.

Utemeljitev

Zgornji sklep utemeljimo podobno kot pri korelaciji signalov.

6.2.1.6 Zveza med korelacijo in konvolucijo

$$\varphi_{ij}(\tau) = \overline{f_i(-\tau)} * f_j(\tau) \quad (6.20)$$

Izpeljava

Zvezo lahko izpeljemo na enak način kot pri periodičnih signalih. Glej podrazdelek 4.2.1.6 na strani 87.

Komentar

Korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ bo potemtakem enaka konvoluciji $\varrho_{ij}(\tau)$ le, če bo

$$f_i(t) = \overline{f_i(-t)} .$$

Če je signal $f_i(t)$ realen, bo enakost veljala, če je $f_i(t)$ soda funkcija:

$$f_i(t) = f_i(-t) .$$

Do enakih zaključkov bi prišli, če bi primerjali kompleksna spektra korelacije in konvolucije:

$$\phi_{ij}(\omega) = \overline{F_i(\omega)} \cdot F_j(\omega) , \quad R_{ij}(\omega) = F_i(\omega) \cdot F_j(\omega) .$$

Iz primerjave spektrov sledi, da sta spektra amplitudne gostote korelacije in konvolucije enaka:

$$|\phi_{ij}(\omega)| = |R_{ij}(\omega)| .$$

Primer 6.4

Vzemimo signala $f_i(t)$ in $f_j(t)$ (slika 6.15) ter določimo njuno križno korelacijo $\varphi_{ij}(\tau)$ in konvolucijo $\varrho_{ij}(\tau)$:

$$f_i(t) = \begin{cases} A e^{-at} , & t > 0 \quad , \quad A, a > 0 \\ 0 , & \text{drugod} , \end{cases}$$

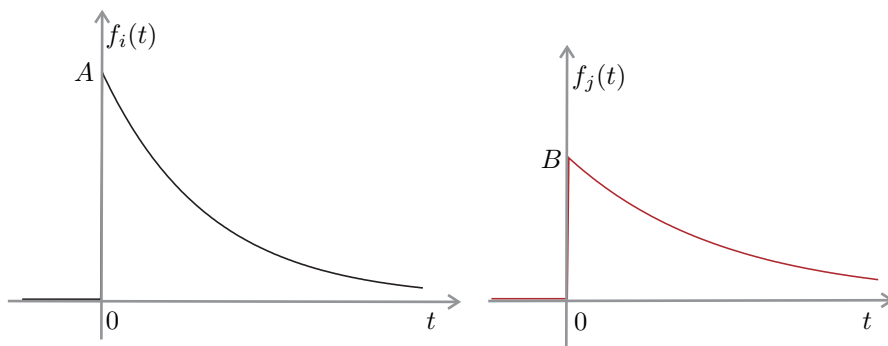
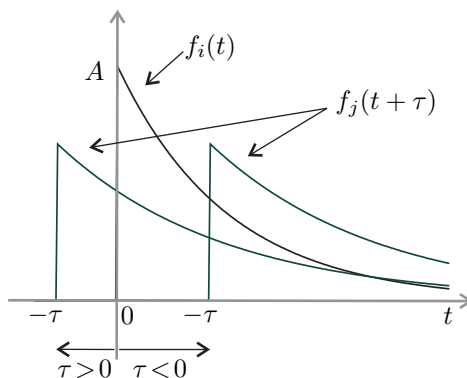
$$f_j(t) = \begin{cases} B e^{-bt} , & t > 0 \quad , \quad B, b > 0 \\ 0 , & \text{drugod} . \end{cases}$$

Rešitev

Križna korelacija $\varphi_{ij}(\tau)$ je definirana z izrazom (6.10)

$$\varphi_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) f_j(t + \tau) dt .$$

Iz poteka signala $f_j(t + \tau)$ za pozitivne in negativne vrednosti τ (slika 6.16) razberemo interval, kjer je produkt $f_i(t) f_j(t + \tau)$ različen od 0:

Slika 6.15: Potek signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$ Slika 6.16: Potek signalov $f_i(t)$ in $f_j(t + \tau)$ za $\tau < 0$ in $\tau > 0$.

$$f_i(t) f_j(t + \tau) \neq 0 \Leftrightarrow t > 0, \text{ če je } \tau > 0$$

in

$$f_i(t) f_j(t + \tau) \neq 0 \Leftrightarrow t > -\tau, \text{ če je } \tau < 0.$$

Potek $\varphi_{ij}(\tau)$ določimo najprej za pozitivne vrednosti τ :

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\tau) &= \int_0^{\infty} f_i(t) f_j(t + \tau) dt = \int_0^{\infty} A e^{-at} B e^{-b(t+\tau)} dt \\ &= AB e^{-b\tau} \int_0^{\infty} e^{-(a+b)t} dt = -\frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} e^{-(a+b)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{AB}{a+b} e^{-b\tau}. \end{aligned}$$

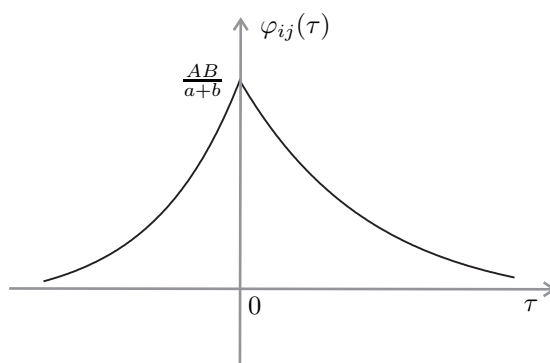
Zdaj naj bo τ negativen:

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(\tau) &= AB e^{-b\tau} \int_{-\tau}^{\infty} e^{-(a+b)t} dt = -\frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} e^{-(a+b)t} \Big|_{-\tau}^{\infty} \\ &= \frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} e^{(a+b)\tau} = \frac{AB}{a+b} e^{a\tau}. \end{aligned}$$

Tako je križna korelacija preko cele časovni osi določena z

$$\varphi_{ij}(\tau) = \begin{cases} \frac{AB}{a+b} e^{a\tau} & , \tau \leq 0 \\ \frac{AB}{a+b} e^{-b\tau} & , \tau \geq 0 . \end{cases}$$

Njen potek je podan na sliki 6.17.



Slika 6.17: Potek križne korelacije $\varphi_{ij}(\tau)$

Določimo še konvolucijo signalov $f_i(t)$ in $f_j(t)$. Po (6.15) je

$$\varrho_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(t) f_j(\tau - t) dt .$$

S slike 6.18 razberemo interval, na katerem je produkt signalov $f_i(t) f_j(\tau - t)$ različen od 0:

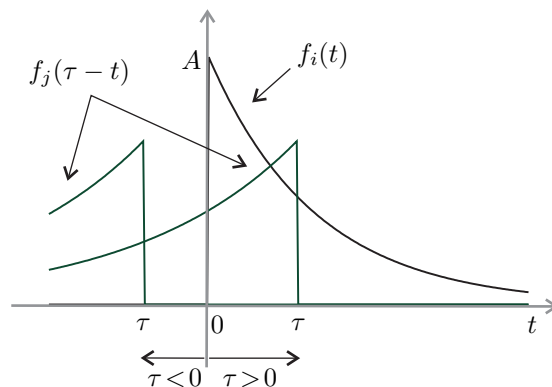
$$f_i(t) f_j(\tau - t) = 0 \iff \text{za vsak } t, \text{ če je } \tau < 0$$

in

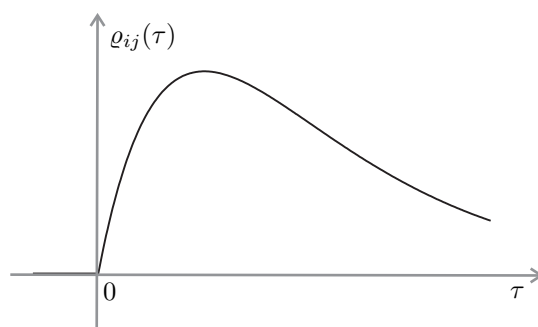
$$f_i(t) f_j(\tau - t) \neq 0 \iff 0 < t < \tau, \text{ če je } \tau > 0.$$

Za negativne τ je torej $\varrho_{ij}(\tau) = 0$. Za pozitivne vrednosti τ pa velja:

$$\begin{aligned} \varrho_{ij}(\tau) &= \int_0^{\tau} f_i(t) f_j(\tau - t) dt = \int_0^{\tau} A e^{-at} B e^{-b(\tau-t)} dt \\ &= AB e^{-b\tau} \int_0^{\tau} e^{(b-a)t} dt = \frac{AB}{b-a} e^{-b\tau} e^{(b-a)t} \Big|_0^{\tau} \\ &= \frac{AB}{b-a} e^{-b\tau} (e^{(b-a)\tau} - 1) = \frac{AB}{b-a} (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) . \end{aligned}$$



Slika 6.18: Potek signalov $f_i(t)$ in $f_j(\tau - t)$ za $\tau < 0$ in $\tau > 0$.



Slika 6.19: Potek konvolucije $q_{ij}(\tau)$

Konvolucija je torej enaka

$$q_{ij}(\tau) = \begin{cases} 0 & , \tau \leq 0 \\ \frac{AB}{b-a} (e^{-a\tau} - e^{-b\tau}) & , \tau \geq 0. \end{cases}$$

njen potek pa je razviden s slike 6.19.

Rezultat za pozitivne τ je nedoločen za primer $a = b$. Če izhajamo iz definicijskega integrala za konvolucijo (6.15), v tem primeru dobimo:

$$\begin{aligned} q_{ij}(\tau) &= \int_0^{\tau} f_i(t) f_j(\tau - t) dt = \int_0^{\tau} A e^{-at} B e^{-a(\tau-t)} dt \\ &= AB e^{-a\tau} \int_0^{\tau} dt = AB e^{-a\tau} t \Big|_0^{\tau} = AB e^{-a\tau} \tau. \end{aligned}$$

Tudi v tem primeru je potek konvolucije tak, kot je prikazan na sliki 6.19.

Komentar

Iz primerjav potekov $\varphi_{ij}(\tau)$ in $q_{ij}(\tau)$ na slikah 6.17 in 6.19 je razvidno, da gre

za dva povsem različna signala. Kot smo ugotovili v podrazdelku 6.2.1.6, pa sta njuna spektra amplitudne gostote enaka.

6.2.2 Predstavitev Fourierovega integrala

Zapišimo Fourierov integral za nek poljuben signal $f(t)$, ki zadošča Dirichletovim pogojem², zamenjajmo vrstni red integriranja in upoštevajmo, da je $\delta(t) \longleftrightarrow 1$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau . \end{aligned}$$

Funkcija $\delta(t)$ je potemtakem enota za konvolucijo:

$$f(t) = f(t) * \delta(t) . \quad (6.21)$$

Podobno lastnost (4.38) smo pri obravnavi periodičnih signalov ugotovili za periodično konvolucijo $\delta_T(t)$.

Ker je konvolucija simetrična in $\delta(t) = \delta(-t)$, velja tudi

$$f(t) = f(t) * \delta(t) = \delta(t) * f(t) = \delta(-t) * f(t) = \varphi_{\delta} f(t) . \quad (6.22)$$

Funkcija $\delta(t)$ je torej tudi enota za računanje križne korelacije, če v njej nastopa kot prvi faktor.

6.2.3 Časovni izrez signala in njegov spekter

Recimo, da zaradi posebnih okoliščin informacijo o poteku signala $f(t)$ lahko pridobimo le na končnem časovnem intervalu $(-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2})$, ki predstavlja le del časovnega območja, na katerem je $f(t)$ različen od 0. Tak del signala imenujemo časovni izrez signala $f(t)$ in ga označimo z $g(t)$:

$$g(t) = \begin{cases} f(t) , & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0 , & \text{drugod} . \end{cases}$$

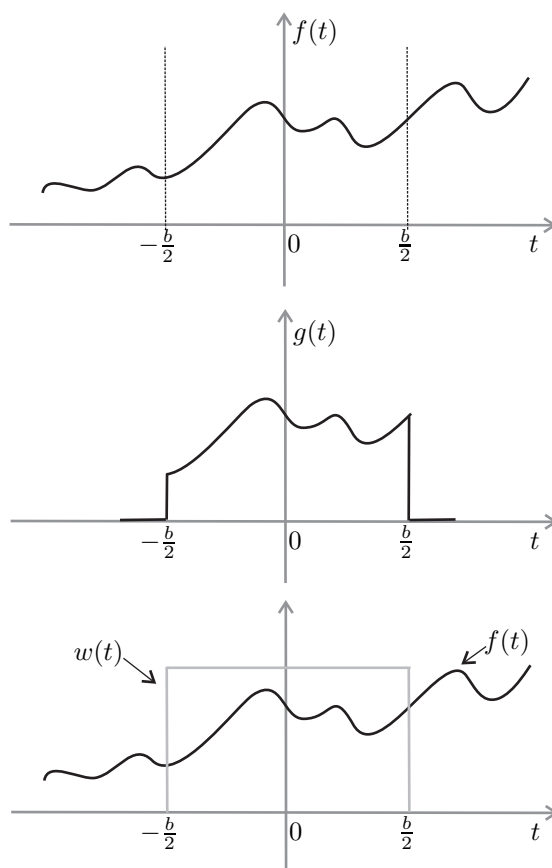
Zvezo med signaloma $f(t)$ in $g(t)$ lahko zapišemo tudi z enačbo

$$g(t) = w(t) \cdot f(t) , \quad (6.23)$$

kjer je

$$w(t) = \begin{cases} 1 , & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0 , & \text{drugod} \end{cases}$$

²Glej razdelek 5.2.2 na strani 100.



Slika 6.20: Časovni izrez $g(t)$ signala $f(t)$ z okensko funkcijo $w(t)$

pravokotni impulz. V takem primeru funkcijo $w(t)$ imenujemo tudi *okensko funkcijo*. Postopek obdelave signala z okensko funkcijo je ponazorjen na sliki 6.20.

Iz lastnosti (6.19) sledi zveza

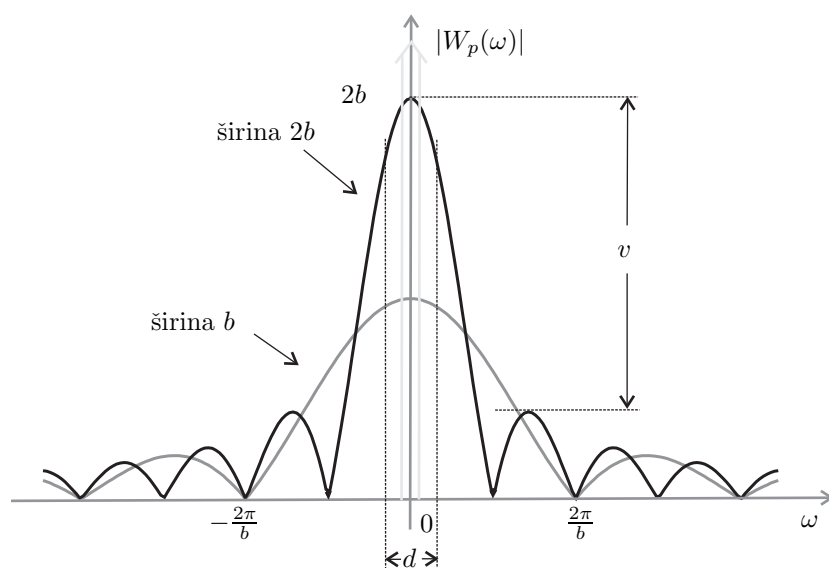
$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} W(\omega) * F(\omega) .$$

Vzemimo, da bi želeli iz poteka signala $g(t)$ čim boljše oceniti spekter $F(\omega)$. Ker je (6.21) funkcija $\delta(\omega)$ enota za konvolucijo, bi bila ocena spektra brez napake v primeru, ko bi veljalo, da je

$$W(\omega) = \delta(\omega) .$$

Če je okenska funkcija pravokoten impulz, se bo to zgodilo, ko se bo impulz spremenil v konstanto (5.43), to je pri $b = \infty$. Po drugi strani pa se pojavi vprašanje, ali lahko oceno spektra izboljšamo pri vnaprej predpisani širini okna b tako, da uporabimo drugačno okensko funkcijo $w(t)$. Smiselno vodilo pri tem je, da naj bo spekter $W(\omega)$ signala $w(t)$ čim bolj podoben funkciji $\delta(\omega)$.

Postopki za določanje okenskih funkcij [2] običajno temeljijo na tem, da stremijo k čim ožjemu osnovnemu impulzu spektra na območju do padca amplitud za 3 dB, k tem večjemu razmerju med globalnim maksimumom $W(0)$ in največjim lokalnim maksimumom spektra $W(\omega)$ izven glavnega loka ter izpolnitvi še kakšnega specifičnega pogoja, kot so na primer razvrstitev leg ničel okenske funkcije in hitrosti padanja amplitud stranskih lokov (slika 6.21).

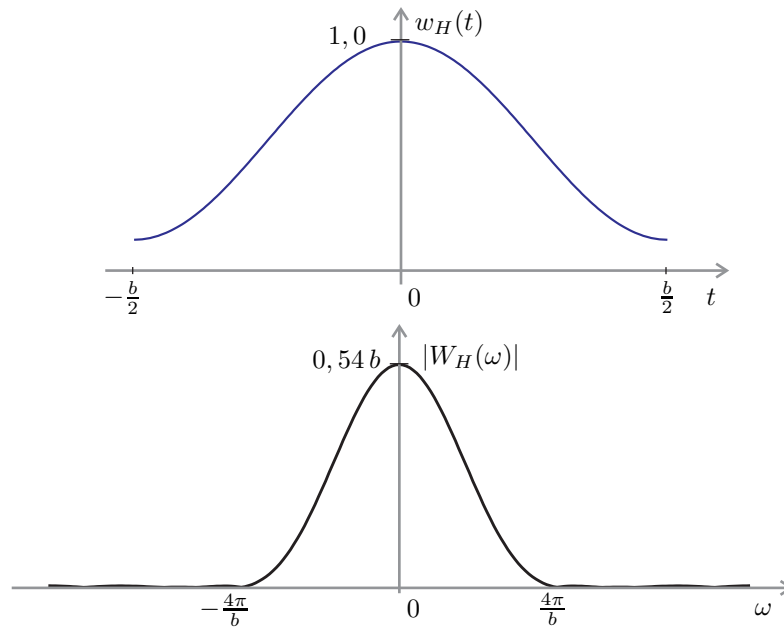


Slika 6.21: Spektra okenske funkcije pravokotnega okna $|W_p(\omega)|$ pri dveh različnih širinah okna (sivo - širina b , črno - širina $2b$). Z d in v sta označena parametra okenske funkcije, ki ju želimo optimirati.

Kot lahko razberemo s slike 6.20, pridobi s pravokotnim oknom izrezan signal $g(t)$ običajno večje ali manjše nezveznosti na robovih, ki jih prvotni signal $f(t)$ nima. Posledične razlike v spektrih obeh signalov so zato opaznejše v višje-frekvenčnem področju, kjer je spekter $|G(\omega)|$ tipično večji od spektra $|F(\omega)|$. Oblike primernejših okenskih funkcij so zato take, da njihove amplitude, ko se približujemo robovom okna, padajo proti 0. Izkaže se, da je včasih za oknjenje primerneje izbrati kar trikotno okno, katerega spekter smo določili v zgledu 6.1 (slika 6.5). Pri obdelavi signalov s tem namenom velikokrat uporabljamo Hammingovo okno $w_H(t)$ (slika 6.22), za katerega smo Fourierovo transformacijo določili v primeru 5.5 na strani 112:

$$w_H(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{2\pi}{b}t, & -\frac{b}{2} < t < +\frac{b}{2} \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$

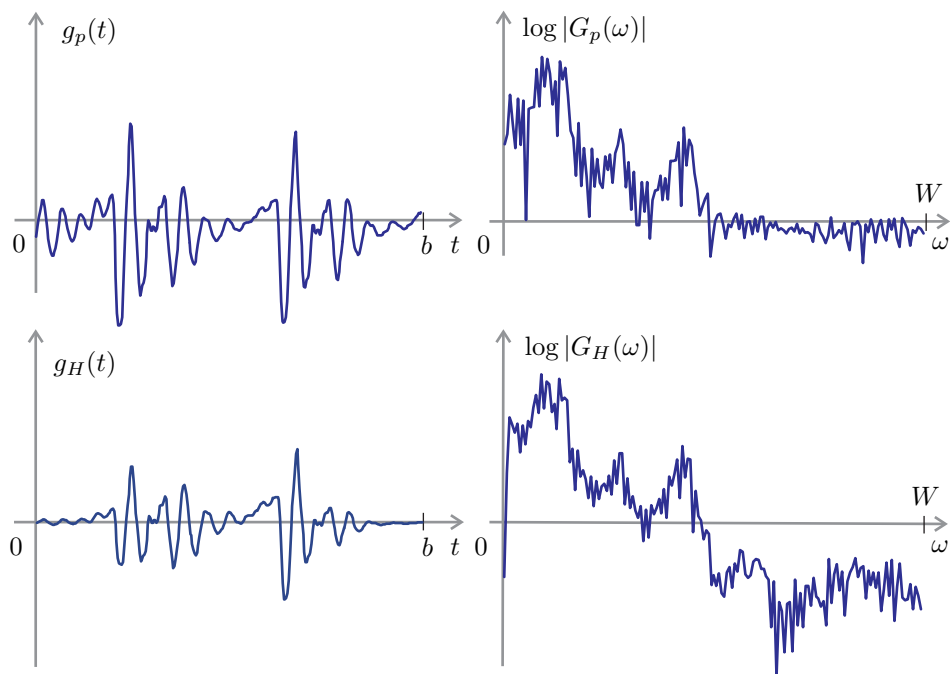
Za specifične probleme pri obdelavi signalov je bilo predlaganih že veliko tipov okenskih funkcij. Za podrobnejši opis glej na primer [3].



Slika 6.22: Hammingova okenska funkcija $w_H(t)$ in njen spekter amplitudne gostote $|W_H(\omega)|$

Primer 6.5

Na sliki 6.23 je prikazana ocena spektra logaritma amplitudne gostote izseka zvonečega dela govornega signala z uporabo pravokotnega in Hammingovega okna. Opazna je razlika v oceni višje-frekvenčnega dela spektra.



Slika 6.23: Oceni spektra govornega signala glasu a s pravokotnim $\log |G_p(\omega)|$ in Hammingovim oknom $\log |G_H(\omega)|$. Pri tem je $b = 20 \text{ ms}$ širina okenske funkcije, $g_p(t)$ je izrez govornega signala s pravokotnim oknom, $g_H(t)$ je izrez govornega signala s Hammingovim oknom, $W = 2\pi \cdot 8 \text{ kHz}$ pa frekvenčna širina ocene spektra.

Literatura

- [1] S. Dobrišek, F. Mihelič, N. Pavešić: Pridobivanje in predobdelava govornih signalov za novo slovensko govorno podatkovno bazo, *Zbornik tretje Elektrotehniške in računalniške konference ERK'94, Vol. B*, Portorož, september 1994, str. 299–302.
- [2] R. A. Haddad, T. W. Parsons: 7.2 Spectral Estimation, *Digital Signal Processing*, Computer Science Press, 1991, str. 321–581.
- [3] F. J. Harris: On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Fourier Transform, *Proceedings of the IEEE*, 66(1), januar 1978, str. 51–82.

7. Naključni signali

7.1 Splošni pojmi

Do fizikalne opredelitve pojma naključnih signalov lahko pridemo na sledeč način: Deterministične signale oddajajo fizikalni procesi, ki se pri ponavljanju preizkusa in nespremenjenih zunanjih pogojih vedno enako odzivajo.

Če preizkusa ne moremo ponoviti pod enakimi pogoji, tudi odzivi niso vedno enaki. Take odzive imenujemo naključne odzive oziroma naključne signale.

Pojem naključnega signala definiramo z naslednjo lastnostjo:

- Naključni signal je signal, katerega obnašanje v prihodnosti ne moremo natančno napovedati.

Definirajmo še pojma faznega prostora in naključnega procesa:

- *Fazni prostor* imenujemo množico vseh možnih amplitud (vrednosti), ki jih naključni signal lahko zavzame¹.
- Sistem, ki oddaja naključne signale, imenujemo *naključni vir* ali *naključni proces*.

Da si omogočimo dovolj splošno obravnavo naključnih signalov, privzamemo:

- Naključni signal obravnavamo kot signal z neskončnim časom trajanja ($-\infty < t < +\infty$).
- Opazujemo obnašanje skupine (množice) realizacij naključnih signalov, ki jih oddaja isti vir ali podobni viri.
- Množica opazovanih signalov je po svoji moči (številu elementov) neomejena.

Oceno (vzorec) te množice v realnosti dobimo, ko določen naključni vir zaporedoma rojeva signale. Ti so po trajanju končni in jih je končno mnogo.

¹Pojem faznega prostora ima pri naključnih signalih enak pomen kot pojem zaloge vrednosti pri opisovanju funkcij.

Temeljne lastnosti determinističnih in naključnih signalov lahko strnemo v naslednje ugotovitve:

- Za deterministične signale poznamo natančno odvisnost od časa in za večino je določena tudi njihova predstavitev v frekvenčnem prostoru.
- Pri naključnih signalih je natanko določen le njihov potek v preteklosti. V prihodnosti lahko signal z določeno verjetnostjo zavzame vse vrednosti v svojem faznem prostoru. Iz poteka signala v preteklosti lahko njegovo spektralno predstavitev le delno ocenimo.

Če želimo naključni signal opisati in ovrednotiti njegove lastnosti, potrebujemo za to deterministične karakteristike. To so lahko določene vrednosti ali signali, ki so izvedeni iz množice realizacij naključnih signalov in so deterministične narave.

7.1.1 Privzetek o stacionarnosti

Zaradi enostavnejše obravnave velikokrat privzamemo, da so naključni viri, ki signale rojevajo, stacionarni.

Zaenkrat privzemimo naslednjo definicijo stacionarnosti²:

- Vzemimo, da se statistične lastnosti signala s časom ne spreminjajo. Naključni vir, ki generira take signale, imenujemo stacionaren. Vrsto naključnega signala, ki ga generira tak vir, pa stacionarni naključni signal.

Ta privzetek ima naslednje pomembne posledice, ki jih bomo utemeljili in podrobneje komentirali v naslednjih razdelkih:

1. Enostavne deterministične karakteristike, kot sta na primer srednja vrednost in varianca amplitud signala (karakteristike prvega reda), so od časa neodvisne.
2. Stacionaren naključni signal ne more biti energijski³.
3. Naj bo $f_i(t)$ stacionaren naključni signal s končno povprečno močjo:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f_i(t)|^2 dt < \infty .$$

Pokazati je mogoče, da je v tem primeru funkcija

$$\varphi_{ii}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f_i(t)} f_i(t + \tau) dt \quad (7.1)$$

deterministični energijski signal, definiran na celi časovni osi. Ta signal imenujemo avtokorelacija naključnega signala $f_i(t)$ in je pomembna deterministična karakteristika naključnega signala (karakteristika drugega reda).

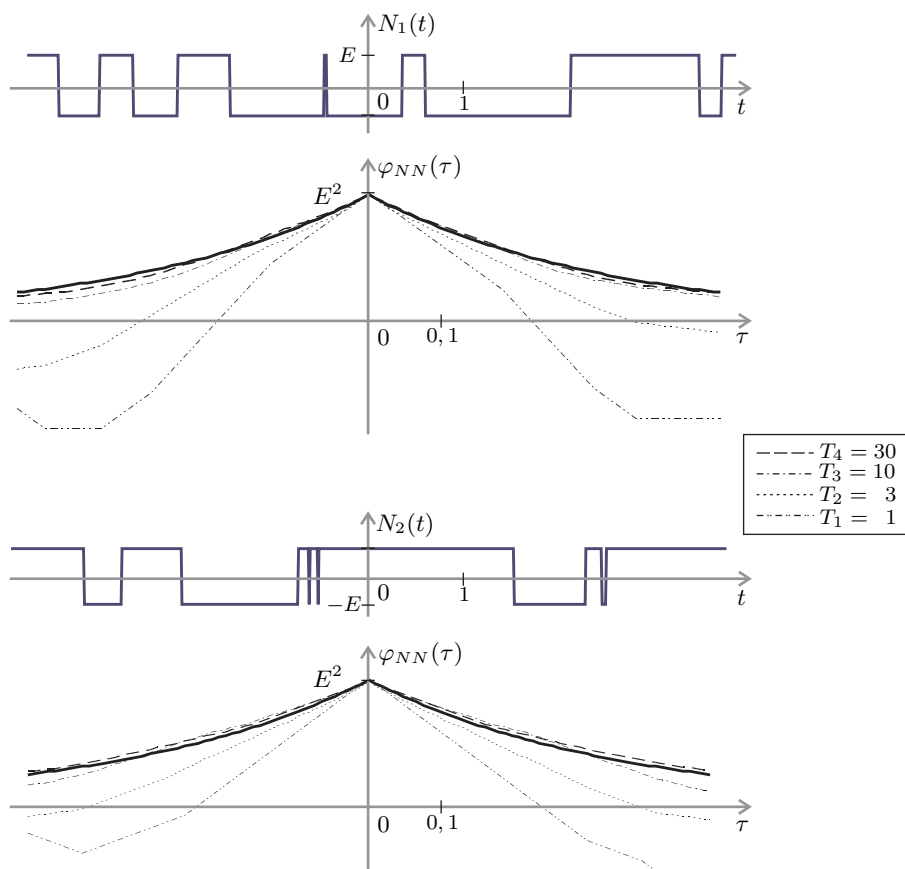
²V razdelku 7.2.4 bomo lastnosti stacionarnosti natančneje definirali.

³Glej utemeljitev v 1. poglavju na strani 14.

Z uporabo izraza (7.1) avtokorelacije naključnega signala v praksi sicer ne moremo natanko določiti, ker pa gre za limitno operacijo, se lahko poteku avtokorelacije poljubno natančno približamo, če oceno avtokorelacije določimo na dovolj širokem končnem časovnem intervalu dolžine T .

Primer 7.1

Ocenimo potek avtokorelacijske funkcije Poissonovega vala. Več o tej vrsti naključnega signala bomo izvedeli v razdelku 7.3. Zaenkrat povejmo le to, da je Poissonov val $N(t)$ preprost stacionarni naključni signal z zalogo vrednosti $\{+E, -E\}$, kjer se predznak amplitude spreminja naključno s povprečno frekvenco sprememb predznaka na časovno enoto κ .



Slika 7.1: Prvih 8 sekund potekov realizacij $N_1(t)$ in $N_2(t)$ Poissonovega vala. Pod poteki realizacij $N_1(t)$ in $N_2(t)$ so prikazane ocene avtokorelacijske funkcije, ki smo jih določili na podlagi poteka pripadajoče realizacije. Ocene avtokorelacije so podane črtkano. S polno črto je označen teoretični potek avtokorelacije $\varphi_{NN}(\tau)$.

Rešitev

Z generatorjem naključnih števil lahko udejanimo različne realizacije takega signala na poljubno dolgem končnem časovnem intervalu. V našem primeru smo za $\kappa = 1,5$ na tak način udejanili dva možna 31 sekund dolga poteka naključnega signala $N_1(t)$ in $N_2(t)$ (slika 7.1). Na različno dolgih časovnih izsekih T_i smo potem ocenili potek avtokorelacije $\varphi_{NN}(\tau)$:

$$\varphi_{NN}(\tau) \approx \frac{1}{2T_i} \int_{-T_i}^{T_i} N_j(t)N_j(t+\tau)dt \quad j = 1, 2.$$

Kot bomo videli v razdelku 7.3, je mogoče avtokorelacijo Poissonovega vala tudi teoretično določiti:

$$\varphi_{NN}(\tau) = E^2 e^{-2\kappa|\tau|}.$$

Na sliki 7.1 so prikazani poteki ocen avtokorelacijske funkcije za obe realizaciji $N_1(t)$ in $N_2(t)$. Kot lahko razberemo s slike, se poteki ocen avtokorelacijske funkcije, ko večamo širino časovnega intervala T_i , neodvisno od izbire realizacije naključnega signala približujejo teoretičnemu poteku avtokorelacije.

7.1.1.1 Lastnosti avtokorelacije stacionarnih naključnih signalov

Podobno kot pri determinističnih periodičnih in neperiodičnih signalih ima tudi avtokorelacija stacionarnih naključnih signalov določene lastnosti, ki se v marsičem ujema z lastnostmi avtokorelacij determinističnih signalov. Naštejmo jih:

1. Hermitova simetrija

$$\varphi_{ii}(\tau) = \overline{\varphi_{ii}(-\tau)} \quad (7.2)$$

Izpeljava

Lastnost utemeljimo na enak način kot pri determinističnih signalih.

2. Povprečna moč

$$\varphi_{ii}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f_i(t)} f_i(t) dt = P_{f_i} \quad (7.3)$$

Izpeljava

Lastnost sledi neposredno iz definicij (7.1) in (1.6).

3. Maksimalnost

$$\varphi_{ii}(0) \geq |\varphi_{ii}(\tau)|$$

Izpeljava

Komentar in utemeljitev te lastnosti bomo podali v razdelkih 7.2.3 in 7.2.5.1.

4. Limitna vrednost pri $\tau = \pm\infty$

Za povsem⁴ naključni signal $f_i(t)$ velja

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_{ii}(\tau) = 0. \quad (7.4)$$

Izpeljava

Komentar in utemeljitev te lastnosti bomo prav tako podali v razdelkih 7.2.3 in 7.2.5.1.

5. Wienerjev izrek

Avtokorelacija stacionarnega naključnega signala je deterministični signal, za katerega lahko določimo Fourierovo in inverzno Fourierovo transformacijo⁵:

$$\phi_{ii}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (7.5)$$

$$\varphi_{ii}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.6)$$

Kompleksni spekter $\phi_{ii}(\omega)$ je nenegativen

$$\phi_{ii}(\omega) \geq 0. \quad (7.7)$$

Izpeljava

Dokaz tega izreka presega zahtevnost tega dela in je podan v [1].

Komentar

Ker je $\phi_{ii}(\omega) \geq 0$, je $|\phi_{ii}(\omega)| = \phi_{ii}(\omega)$ in fazni spekter avtokorelacije $\theta_{ii}(\omega) = 0$.

6. Spekter močnostne gostote

Integral kompleksnega spektra avtokorelacije preko cele frekvenčne osi je enak povprečni moči signala P_{f_i} :

$$P_{f_i} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) d\omega. \quad (7.8)$$

Izpeljava:

Iz relacije (7.6) za $\tau = 0$ dobimo

$$\varphi_{ii}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) d\omega.$$

Ker je $\varphi_{ii}(0)$ po (7.3) enaka povprečni moči signala $f_i(t)$, je relacija (7.8) s tem potrjena.

Komentar

Zaradi nenegativnosti $\phi_{ii}(\omega)$ in relacije (7.8) lahko zmnožek $\frac{1}{2\pi} \phi_{ii}(\omega) d\omega$ opredelimo kot del moči, ki je vsebovan v signalu $f_i(t)$ pri frekvenci ω .

⁴S pojmom povsem naključen mislimo, da signala $f_i(t)$ ne moremo predstaviti s kombinacijo deterministične in naključne komponente. To pomeni tudi, da je srednja vrednost signala enaka 0.

⁵Izrek se imenuje po ameriškem matematiku Norbertu Wienerju (1894 – 1964), ki je v veliki meri zaslužen za vpeljavo in uporabo statističnih metod v teoriji komunikacij.

- Zaradi tega $\phi_{ii}(\omega)$ imenujemo spekter močnostne gostote signala $f_i(t)$.

7. Zveznost

Kot pri determinističnih signalih tudi v tem primeru velja, da je avtokorelacija zvezna, če je le naključni signal, ki jo določa, vsaj odsekoma zvezen. Dokazati je tudi mogoče⁶, da je avtokorelacija stacionarnega naključnega signala zvezna, če je zvezna v izhodišču.

7.2 Statistično opisovanje naključnih procesov

Pri statističnem opisovanju naključnih procesov se bomo v tem razdelku omejili na opisovanje statističnih lastnosti naključnih signalov, ki jih taki sistemi oddajajo. Kljub temu, da je spoznanja, ki jih bomo navedli v tem in naslednjih razdelkih tega poglavja, mogoče posplošiti na kompleksne naključne signale, zaradi večje nazornosti in enostavnejših izpeljav privzemimo, da so naključni signali realni.

Vzemimo, da naključni proces oddaja dva naključna signala $x(t)$ in $y(t)$. Z $x_k(t)$ in $y_k(t)$ označimo k -ti hkratni realizaciji naključnih signalov $x(t)$ in $y(t)$. Beležili bomo končno število realizacij $\{x_k(t)\}$ signala $x(t)$ in hkratne realizacije $\{y_k(t)\}$ signala $y(t)$.

Iz $\{x_k(t)\}$ in $\{y_k(t)\}$ bomo na podlagi statistične analize poizkusili pridobiti opise lastnosti naključnega procesa oziroma njegovih izhodnih signalov.

7.2.1 Vzorčno povprečje

Vzorčno povprečje naključnega signala ob izbranem časovnem trenutku t_1 definiramo kot povprečno vrednost vseh realizacij signala $x(t)$ ob tem času:

$$\overline{x(t_1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1), \quad (7.9)$$

kjer z $x_k(t)$ označimo k -to realizacijo naključnega signala in z n število vseh realizacij, ki jih obravnavamo. Pokažimo naslednjo zvezo!

- V primeru, ko gre $n \rightarrow \infty$, je vzorčno povprečje enako matematičnemu upanju vrednosti signala:

$$\overline{x(t_1)} = E(x(t_1)). \quad (7.10)$$

Matematično upanje naključne spremenljivke⁷ $E(x(t_1))$, kot lahko razumemo tudi vrednosti naključnega signala $x(t)$ pri izbranem časovnem trenutku t_1 , definiramo

⁶Glej na primer [2]

⁷Glej tudi [3].

z

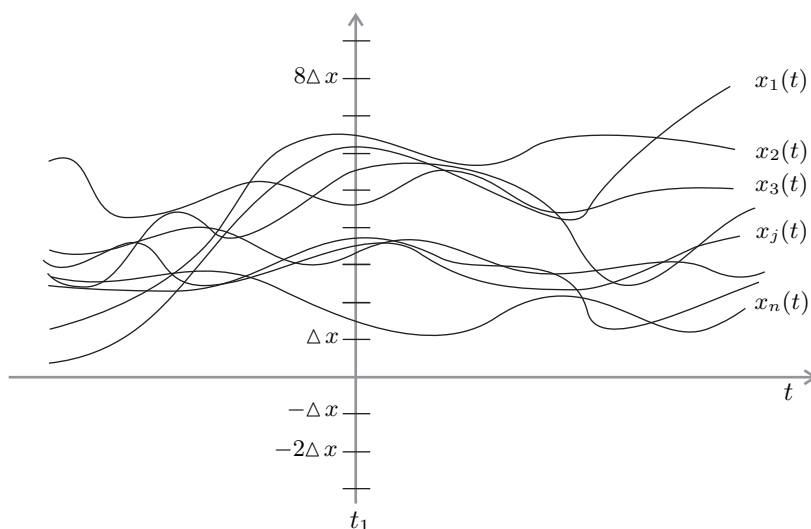
$$E(x(t_1)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \Delta x P(m \Delta x \leq x(t_1) < (m+1) \Delta x), \quad (7.11)$$

kjer s

$$P(m \Delta x \leq x(t_1) < (m+1) \Delta x)$$

označimo verjetnost dogodka, da naključni signal $x(t)$ ob času t_1 zavzame vrednost z intervala $[m\Delta x, (m+1)\Delta x)$.

Za ponazoritev glej tudi sliko 7.2.



Slika 7.2: Hipotetični poteki n realizacij $x_k(t)$ naključnega signala $x(t)$ v okolici časovnega trenutka t_1

Izpeljava

Izrazimo vzorčno povprečje $\overline{x(t_1)}$ z naslednjo oceno:

$$\overline{x(t_1)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) \approx \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \Delta x f_m(t_1), \quad (7.12)$$

kjer je $f_m(t_1)$ število (frekvenca) realizacij naključnega signala $x(t)$, za katere velja

$$m \Delta x \leq x_k(t_1) < (m+1) \Delta x. \quad (7.13)$$

V hipotetičnem primeru s slike 7.2 je na primer $f_3(t_1) = 3$. V limiti, ko gre $\Delta x \rightarrow 0$, lahko pričakujemo enakost

$$\overline{x(t_1)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \Delta x f_m(t_1). \quad (7.14)$$

Izraz (7.12) lahko zapišemo tudi kot

$$\dots\dots x(t_1) \approx \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \Delta x \frac{f_m(t_1)}{n}$$

in količino

$$\frac{f_m(t_1)}{n}$$

interpretiramo kot relativno frekvenco dogodkov iz (7.13). Kot vemo iz verjetnostnega računa [4, 5], z večanjem števila poskusov⁸ relativna frekvenca dogodka konvergira k njegovi verjetnosti⁹:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_m(t_1)}{n} = P(m \Delta x \leq x(t_1) < (m+1) \Delta x). \quad (7.15)$$

Z uporabo zvez (7.14), (7.15) in (7.11) sedaj lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} \dots\dots x(t_1) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \Delta x \frac{f_m(t_1)}{n} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \Delta x P(m \Delta x \leq x(t_1) < (m+1) \Delta x) = E(x(t_1)). \end{aligned}$$

S tem smo zvezo (7.10) potrdili.

Vzemimo, da so amplitude signala $x(t)$ ob času t_1 zvezno porazdeljene realne vrednosti [6]. V tem primeru lahko naredimo naslednje zamenjave:

$$\begin{aligned} \Delta x &\longrightarrow dx \\ m \Delta x &\longrightarrow x \\ P(m \Delta x \leq x(t_1) < (m+1) \Delta x) &\longrightarrow P(x \leq x(t_1) < x + dx). \end{aligned}$$

Verjetnost $P(x \leq x(t_1) < x + dx)$, da naključni signal $x(t)$ ob času t_1 zavzame vrednost na amplitudnem intervalu širine dx , je pri zvezni porazdelitvi infinitezimalno majhna in jo zapišemo kot

$$P(x \leq x(t_1) < x + dx) = p(x, t_1) dx,$$

kjer $p(x, t_1)$ imenujemo gostota verjetnosti dogodka, da ima naključni signal ob času t_1 vrednost x :

$$x(t_1) = x.$$

⁸Oziroma večanjem števila realizacij naključnega signala $x(t)$.

⁹Če bi bili povsem natančni [5], bi morali pisati

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_m(t_1)}{n} = P(m \Delta x \leq x(t_1) < (m+1) \Delta x)\right) = 1.$$

Verjetnost dogodka, da leži vrednost naključnega signala $x(t)$ ob času t_1 na intervalu (a, b) , lahko v tem primeru predstavimo kot

$$P(a < x(t_1) < b) = \int_a^b p(x, t_1) dx .$$

Ker je $P(-\infty < x(t_1) < +\infty)$ gotov dogodek, je

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x, t_1) dx = 1 .$$

Matematično upanje $E(x(t_1))$ oziroma vzorčno povprečje $\overline{x(t_1)}$ signala $x(t)$ ob času t_1 pa je v primeru zvezne porazdelitve amplitud z upoštevanjem (7.10) in (7.11) enako

$$\overline{x(t_1)} = E(x(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, t_1) dx . \quad (7.16)$$

Naj naključni signal $x(t)$ ob času t_1 zavzame kvečjemu števno mnogo različnih amplitud. Največkrat je teh vrednosti kar končno mnogo, to je M :

$$x(t_1) \in \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$$

V tem primeru je verjetnostna porazdelitev amplitud naključnega signala diskretna:

$$P(x_i, t_1) = P(x(t_1) = x_i) , \quad i = 1, 2, \dots, M .$$

Matematično upanje $E(x(t_1))$ oziroma vzorčno povprečje $\overline{x(t_1)}$ signala $x(t)$ ob času t_1 pa je v primeru diskretne porazdelitve amplitud enako

$$\overline{x(t_1)} = E(x(t_1)) = \sum_{i=1}^M x_i P(x_i, t_1) . \quad (7.17)$$

7.2.2 Minimizacija srednje kvadratne napake

Opazujmo hkratne realizacije signala $x(t)$ ob času t_1 in signala $y(t)$ ob času t_2 , ki ju rodi isti naključni proces. Določimo kriterij, s katerim bomo vrednotili, v kolikšni meri so amplitude signala $y(t)$ ob času t_2 neodvisne od vrednosti amplitud signala $x(t)$ ob času t_1 .

V ta namen definirajmo kriterijsko funkcijo srednje kvadratne napake:

$$\varepsilon_{t_1, t_2}^2(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k(t_1) - by_k(t_2))^2 , \quad (7.18)$$

kjer je n število hkratnih realizacij signalov in b parameter kriterijske funkcije, ki ga želimo določiti tako, da bo vrednost srednje kvadratne napake $\varepsilon_{t_1, t_2}^2(b)$ najmanjša.

Potreben pogoj za nastop ekstrema je

$$\frac{\partial \varepsilon_{t_1, t_2}^2(b)}{\partial b} = 0.$$

Ker je

$$\varepsilon_{t_1, t_2}^2(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^2(t_1) - 2bx_k(t_1)y_k(t_2) + b^2y_k^2(t_2)) ,$$

je

$$\frac{\partial \varepsilon_{t_1, t_2}^2(b)}{\partial b} = 2 \left[-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1)y_k(t_2) + b \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(t_2) \right] = 0.$$

Iz enačbe

$$-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1)y_k(t_2) + b \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(t_2) = 0$$

za vrednost parametra b dobimo naslednjo rešitev:

$$b = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) y_k(t_2)}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(t_2)}.$$

Če izraz za optimalno vrednost parametra b upoštevamo pri določitvi srednje kvadratne napake, dobimo

$$\varepsilon_{t_1, t_2}^2(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2(t_1) \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) y_k(t_2) \right)^2}{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2(t_1) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(t_2)} \right].$$

Vrednost drugega člena v oglatem oklepaju je nenegativna, zato lahko pišemo

$$\varepsilon_{t_1, t_2}^2(b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2(t_1) [1 - \varrho^2] . \quad (7.19)$$

Ker je srednja kvadratna napaka $\varepsilon_{t_1, t_2}^2(b)$ po definiciji (7.18) nenegativna, je

$$\varrho^2 \leq 1$$

in zato

$$-1 \leq \varrho \leq +1 ,$$

kjer je

$$\varrho = \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) y_k(t_2)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2(t_1) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2(t_2)}} . \quad (7.20)$$

Glede na (7.19) je minimalna vrednost srednje kvadratne napake $\varepsilon_{t_1, t_2}^2(b)$ najmanjša (enaka 0), ko je $\varrho^2 = 1$. V tem primeru lahko vrednosti amplitud signala $y(t)$ ob času t_2 popolnoma določimo z vrednostmi $x(t)$ ob času t_1 .

Največjo vrednost minimalne srednje kvadratne napake $\varepsilon_{t_1, t_2}^2(b)$ pa dobimo, ko je $\varrho^2 = 0$ in zato tudi $b = 0$. V tem primeru preproste linearne povezave

$$x(t_1) = by(t_2)$$

med amplitudami naključnih signalov $x(t)$ in $y(t)$ ne moremo potrditi.

Oceno za linearno odvisnost amplitud naključnih signalov velikokrat uporabimo za osnovni pokazatelj, v kolikšni meri so amplitude signalov med seboj odvisne oziroma neodvisne¹⁰. Iz izraza (7.19) lahko sklepamo, da bo odvisnost med amplitudami signalov tem manjša, čim manjša bo vrednost parametra ϱ^2 .

- Vrednost parametra ϱ bo enaka 0, ko bo vrednost števca v ulomku (7.20), ki določa ϱ , enaka 0. Zaradi tega je vrednost

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) y_k(t_2) \quad (7.21)$$

ključni pokazatelj odvisnosti med $x(t_1)$ in $y(t_2)$. Imenujemo jo *korelacijski koeficient*.

- Vrednost ϱ imenujemo *normiran korelacijski koeficient*.

Izraz (7.21) lahko v skladu z definicijo (7.9) razumemo tudi kot vzorčno povprečje produktov $x(t_1) y(t_2)$. Na enak način kot smo to pokazali pri vzorčnem povprečju $x(t_1)$ vrednosti amplitud signala $x(t)$ pri času t_1 , bi lahko tudi v tem primeru uvideli, da v primeru, ko število realizacij raste čez vse meje, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) y_k(t_2) = E(x(t_1) y(t_2)) . \quad (7.22)$$

7.2.3 Korelacijska in kovariančna funkcija

Pišimo

$$t_2 = t_1 + \tau .$$

Čas τ v tem primeru predstavlja časovni zamik med trenutki opazovanja amplitud signala $x(t)$ in signala $y(t)$.

- *Korelacijsko funkcijo* $R_{xy}(\tau, t_1)$ definiramo kot vrednost korelacijskega koeficienta (7.22) v odvisnosti od časovnega zamika τ , pri pogoju, da smo amplitudo signala $x(t)$ merili ob času t_1 :

$$R_{xy}(\tau, t_1) = E(x(t_1) y(t_1 + \tau)) . \quad (7.23)$$

¹⁰Pokazati je mogoče, da v primeru *normalne verjetnostne porazdelitve* vrednosti naključnih spremenljivk linearna neodvisnost spremenljivk pomeni tudi, da sta spremenljivki povsem neodvisni [7].

Korelacijska funkcija $R_{xy}(\tau, t_1)$ pove, kako se spreminja odvisnost vrednosti amplitud naključnih signalov $x(t)$ in $y(t)$ v odvisnosti od časovnega zamika τ med opazovanji vrednosti signalov in trenutka t_1 opazovanja vrednosti signala $x(t)$. Večja absolutna vrednost $R_{xy}(\tau, t_1)$ kaže na večjo odvisnost amplitud. Vrednost korelacijske funkcije, ki je blizu vrednosti 0, je pokazatelj, da odvisnosti med amplitudami signala $x(t)$ pri času t_1 in signala $y(t)$ pri času $t_1 + \tau$ ni.

- Če je $x(t) = y(t)$, govorimo o *avtokorelacijski funkciji*:

$$R_{xx}(\tau, t_1) = E(x(t_1)x(t_1 + \tau)), \quad (7.24)$$

ki meri soodvisnost amplitud naključnega signala $x(t)$ v odvisnosti od časovnega zamika τ med opazovanji vrednosti signala in začetnega trenutka opazovanja t_1 .

Vzemimo, da so verjetnostne porazdelitve amplitud naključnih signalov $x(t)$ in $y(t)$ zvezne. Z enakim razmišljanjem, kot smo ga uporabili pri izpeljavi zapisa matematičnega upanja $E(x(t_1))$ (7.16), lahko tudi v tem primeru ugotovimo, da je

$$R_{xy}(\tau, t_1) = E(x(t_1)y(t_1 + \tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y; \tau, t_1) dx dy, \quad (7.25)$$

kjer $p(x, y; \tau, t_1)$ predstavlja gostoto verjetnosti dogodka, da signal $x(t)$ ob času t_1 zavzame vrednost x in da signal $y(t)$ ob času $t_1 + \tau$ zavzame vrednost y :

$$x(t_1) = x \quad \wedge \quad y(t_1 + \tau) = y.$$

V primeru diskretne verjetnostne porazdelitve amplitud signalov $x(t)$ in $y(t)$, pa dobimo, da je

$$R_{xy}(\tau, t_1) = E(x(t_1)y(t_1 + \tau)) = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} x_i y_j P(x_i, y_j; \tau, t_1), \quad (7.26)$$

kjer je verjetnost $P(x_i, y_j; \tau, t_1)$ verjetnost dogodka, da je

$$x(t_1) = x_i \quad \wedge \quad y(t_1 + \tau) = y_j,$$

M_x in M_y pa sta zaporedoma števili možnih amplitud signala $x(t)$ ob času t_1 in signala $y(t)$ ob času $t_1 + \tau$.

Vrednost korelacijske funkcije $R_{xy}(\tau, t_1)$ ni odvisna le od tega, koliko so amplitude signalov soodvisne med seboj, ampak je občutljiva na srednjo vrednost amplitud naključnih signalov.

Vzemimo na primer dva naključna signala, ki lahko zavzameta le pozitivne vrednosti:

$$x(t) > 0 \quad \wedge \quad y(t) > 0.$$

Ker je korelacijska funkcija določena kot vzorčno povprečje produktov amplitud, bo njena vrednost vedno pozitivna, ne glede na to, ali odvisnost med vrednostmi signalov obstaja ali ne:

$$R_{xy}(\tau, t_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) y_k(t_1 + \tau) > 0.$$

Zaradi tega je, ko srednje vrednosti signalov niso enake 0, za mero odvisnosti amplitud naključnih signalov namesto korelacijske funkcije smiselno uporabiti spremenjen kriterij.

- Če pred določanjem korelacijske funkcije od vrednosti amplitud signalov odštejemo njihovo vzorčno povprečje, dobimo *kovariančno funkcijo* $C_{xy}(\tau, t_1)$:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t_1) &= x(t_1) - E(x(t_1)) \\ \hat{y}(t_1 + \tau) &= y(t_1 + \tau) - E(y(t_1 + \tau)) \\ C_{xy}(\tau, t_1) &= E(\hat{x}(t_1)\hat{y}(t_1 + \tau)) .\end{aligned}\quad (7.27)$$

Velikost kovariančne funkcije $C_{xy}(\tau, t_1)$ zaradi tega ni odvisna od povprečnih vrednosti signalov $E(x(t_1))$ in $E(y(t_1 + \tau))$.

Iz (7.27) lahko ugotovimo, da velja

$$C_{xy}(\tau, t_1) = R_{xy}(\tau, t_1) - E(x(t_1))E(y(t_1 + \tau)) .$$

Kovariančna funkcija bo torej enaka korelacijski funkciji, če bo vsaj ena izmed povprečnih vrednosti signalov enaka 0.

7.2.4 Stacionarni naključni procesi

V prejšnjih podrazdelkih 7.2.1 – 7.2.3 se pri naključnih signalih nismo omejili na stacionarne naključne procese, sedaj pa stacionarnost naključnega procesa natanko definirajmo. Pri tem privzemimo, da lahko verjetnostne porazdelitve amplitud signalov opišemo z zveznimi porazdelitvami.

- Naključni proces, ki rodi naključni signal $x(t)$, imenujemo *stacionarni proces v strogem smislu*, če za poljubno končno n -terico vrednosti amplitud signala x_1, x_2, \dots, x_n ob poljubnih časovnih trenutkih t_1, t_2, \dots, t_n velja

$$\begin{aligned}p(x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \dots, x(t_n) = x_n) = \\ p(x(t_1 + \sigma) = x_1, x(t_2 + \sigma) = x_2, \dots, x(t_n + \sigma) = x_n)\end{aligned}$$

za poljuben časovni zamik σ .

Pri tem je $p(x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2, \dots, x(t_n) = x_n)$ gostota verjetnosti dogodka, da naključni signal $x(t)$ ob času t_1 zavzame vrednost x_1 , ob času t_2 vrednost x_2 itd.

Tako definirano lastnost stacionarnosti je v praksi težko potrditi. Zaradi tega definicijo stroge stacionarnosti omilimo.

- Če v definiciji stroge stacionarnosti zahtevamo, da sta izpolnjena le pogoja za $n = 1$ in $n = 2$, stacionarnost opredelimo kot *stacionarnost v širšem smislu*:

$$p(x(t_1) = x_1) = p(x(t_1 + \sigma) = x_1) , \quad (7.28)$$

$$p(x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2) = p(x(t_1 + \sigma) = x_1, x(t_2 + \sigma) = x_2) . \quad (7.29)$$

Ker je časovni zamik σ lahko poljuben, iz (7.28) sledi, da je verjetnostna porazdelitev za vrednost amplitude naključnega signala neodvisna od časa:

$$p(x(t_1) = x_1) = p(x_1, t_1) = p(x_1, t_1 + \sigma) = p(x_1). \quad (7.30)$$

V enačbi (7.29) s τ označimo

$$\tau = t_2 - t_1$$

in dobimo

$$p(x(t_1) = x_1, x(t_1 + \tau) = x_2) = p(x(t_1 + \sigma) = x_1, x(t_1 + \sigma + \tau) = x_2).$$

Ker je σ poljuben, zgornja verjetnostna porazdelitev ni odvisna od začetnega trenutka opazovanja t_1 . Zato je

$$\begin{aligned} p(x(t_1) = x_1, x(t_1 + \tau) = x_2) = p(x_1, x_2; \tau, t_1) &= p(x_1, x_2; \tau, t_1 + \sigma) \\ &= p(x_1, x_2; \tau). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Če privzamemo, da je naključni proces, ki oddaja naključne signale, stacionaren v širšem smislu, zaradi (7.30) velja, da so vsa enostavna vzorčna povprečja¹¹ neodvisna od časa:

$$\overline{x(t)} = E(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p(x_1) dx_1 = m_x, \quad (7.32)$$

$$Var(x(t)) = E([x(t) - E(x(t))]^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)^2 p(x_1) dx_1 = \sigma_x^2, \quad (7.33)$$

⋮

Zaradi (7.31) za korelacijsko in kovariančno funkcijo velja, da sta odvisni le od časovnega zamika τ med časovnimi trenutki opazovanj amplitud naključnih signalov:

$$R_{xy}(\tau, t_1) = R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2, \quad (7.34)$$

$$C_{xy}(\tau, t_1) = C_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau) - m_x m_y. \quad (7.35)$$

Ker je avtokorelacijska funkcija le poseben primer korelacijske funkcije, tudi zanjo velja enako:

$$R_{xx}(\tau, t_1) = R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2. \quad (7.36)$$

V tem primeru $p(x_1, x_2; \tau)$ pomeni gostoto verjetnosti dogodka, da ima signal $x(t)$ vrednost x_1 in čez čas τ vrednost x_2 :

$$x(t) = x_1 \quad \wedge \quad x(t + \tau) = x_2.$$

¹¹Imenujemo jih tudi vzorčna povprečja prvega reda.

Avtokorelacijska funkcija $R_{xx}(\tau)$ je torej določena kot vzorčno povprečje zmnožkov $x_k(t)x_k(t + \tau)$ vseh realizacij stacionarnega naključnega signala $x(t)$ in je pri tem neodvisna od izbire začetnega trenutka opazovanja t :

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t)x_k(t + \tau) .$$

V kolikšni meri in ali sploh je tako definirana avtokorelacijska funkcija povezana z avtokorelacijo stacionarnega naključnega signala $f(t)$, kot smo jo definirali s (7.1) na strani 159 v razdelku 7.1.1?

Na to vprašanje bomo skušali odgovoriti v naslednjem razdelku.

7.2.5 Vzorčno in časovno povprečje

Vzemimo, da opazujemo n realizacij stacionarnega naključnega signala $x(t)$ na časovnem intervalu dolžine T . Poteke realizacij $x_i(t)$ naključnega signala torej poznamo na časovnem intervalu $[-T, 0]$ (slika 7.3).

Časovni interval $[-T, 0]$ razdelimo na podintervale enake širine Δt . Namesto potekov $x_i(t)$ obravnavajmo njihove približke, ki jih določimo tako, da na vsakem podintervalu širine Δt poteku $x_i(t)$ priredimo konstantno vrednost, ki jo realizacija signala $x_i(t)$ zavzame v levem krajišču podintervala. Kot vidimo tudi na sliki 7.3, tako pridobimo približke, sestavljene iz pravokotnih impulzov. Približki se lahko potekom $x_i(t)$ poljubno natančno približajo, ko razmik Δt dovolj zmanjšamo. Število pravokotnih impulzov, ki približek sestavljajo, je $\frac{T}{\Delta t}$. Da si kasneje poenostavimo primerjave, vzemimo, da je

$$\frac{T}{\Delta t} = n .$$

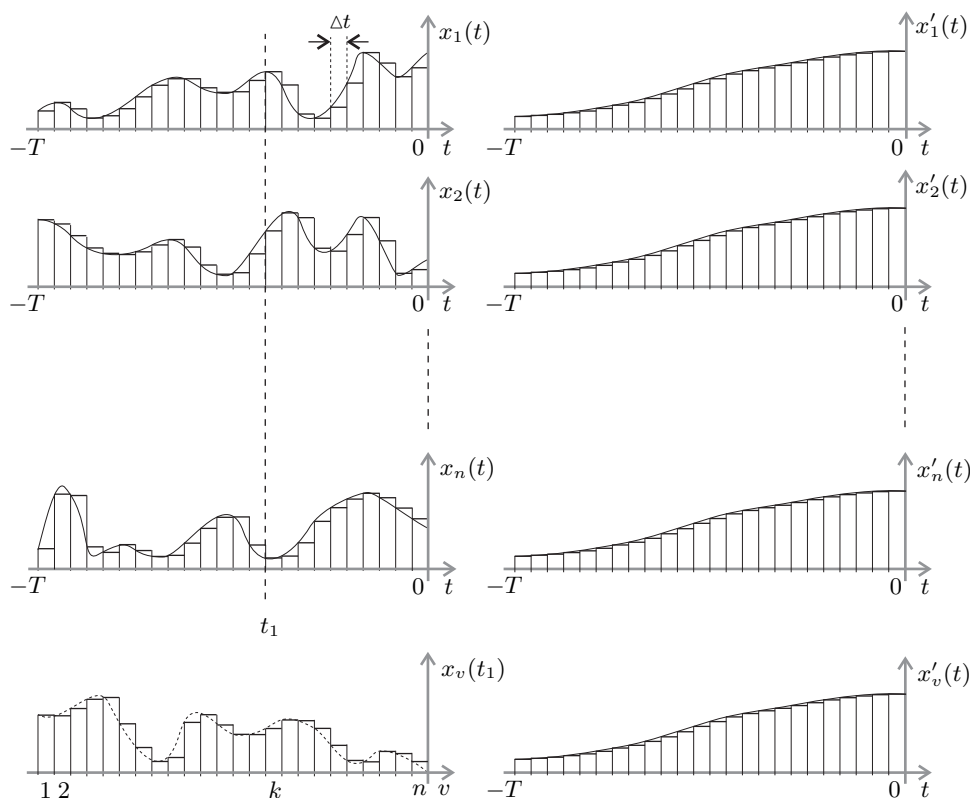
Ta pogoj bi pri načrtovanju eksperimenta vedno lahko izpolnili, tako da bi določili ustrezno¹² število n realizacij naključnega signala $x(t)$, ki jih bomo opazovali.

Vsakemu izmed približkov realizacij $x_i(t)$ naključnega signala priredimo nov signal $x'_i(t)$, ki ga določimo tako, da pravokotne impulze, ki približek sestavljajo, monotono uredimo po velikosti. $x'_i(t)$ je potem monotono naraščajoč, odsekoma konstanten signal (slika 7.3). Ker smo signale $x'_i(t)$ pridobili le z ustrezno permutacijo zaporedja pravokotnih impulzov, ki sestavljajo približek signala $x_i(t)$, je srednja vrednost obeh signalov enaka

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{-1} x_i(k \Delta t) = \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{-1} x'_i(k \Delta t) . \quad (7.37)$$

Tako definirano povprečje $\dots\dots\dots x_i(t)$ imenujemo časovno povprečje, ker smo povprečili vrednosti amplitud približka realizacije $x_i(t)$ preko celega časovnega intervala, kjer smo ga opazovali.

¹²Glede na velikost Δt .



Slika 7.3: Hipotetični poteki n realizacij $x_i(t)$ naključnega signala $x(t)$ na časovnem intervalu $[-T, 0]$ ter monotonno naraščajoči preurejeni poteki njihovih približkov $x'_i(t)$. V zadnji vrstici je predstavljeno zaporedje n meritev $x_v(t_1)$ realizacij naključnih signalov $x_k(t)$ ob časovnem trenutku t_1 in preurejeno monotonno naraščajoče zaporedje teh meritev $x'_v(t_1)$.

Ker smo predpostavili, da je naključni signal $x(t)$ stacionaren, lahko v primeru, ko bomo njegove realizacije opazovali dovolj dolgo, pričakujemo, da bomo za vsak $x_i(t)$ dosegli skoraj enako porazdelitev amplitud pravokotnih impulzov, ki približek $x_i(t)$ sestavljajo. Če pa je njihova porazdelitev enaka, bomo pridobili vedno enak potek njim prirejenih signalov $x'_i(t)$:

$$T \rightarrow \infty : \quad x'_1(t) = x'_2(t) = \dots = x'_n(t) . \quad (7.38)$$

Zaradi tega so enaka tudi časovna povprečja:

$$T \rightarrow \infty : \quad \overline{x_1(t)} = \overline{x_2(t)} = \dots = \overline{x_n(t)} = \overline{x(t)} . \quad (7.39)$$

Z intervala $[-T, 0]$ izberimo nek časovni trenutek $t_1 = k \Delta t$ in opazujemo vrednosti vseh realizacij $x_i(t)$ ob tem času. Če pripadajoče pravokotne impulze sestavimo po vrsti, kot smo označili realizacije naključnega signala $x(t)$, dobimo niz n impulzov, ki ga označimo z $x_v(t_1)$ (slika 7.3). Ko število realizacij n naključnega

signala večamo proti neskončnosti, pričakujemo, da nam bo tako pridobljen niz predstavljal dobro oceno porazdelitve amplitud vrednosti naključnega signala. Na enak način, kot smo to naredili s približki realizacij naključnega signala, tudi sedaj nizu priredimo nov signal $x'_v(t)$, ki ga določimo tako, da pravokotne impulze, ki sestavljajo niz $x_v(t_1)$, uredimo po velikosti (slika 7.3). Zopet lahko zaključimo, da je v tem primeru vzorčno povprečje niza $x_v(t_1)$ enako povprečju signala $x'_v(t)$:

$$\overset{\dots\dots\dots}{x_v(t_1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_1) = \frac{1}{n} \sum_{j=-n}^{-1} x'_v(j \Delta t).$$

Predpostavili smo, da je signal $x(t)$ stacionaren. Zato sta, ko večamo število realizacij signala proti neskončno, vzorčno povprečje $\overset{\dots\dots\dots}{x_v(t_1)}$ in tudi potek signala $x'_v(t)$ neodvisna od izbire časa $t_1 = k \Delta t$ oziroma indeksa k . Ta sklep utemeljimo z razmišljanji v prejšnjih razdelkih 7.2.1 in 7.2.4:

$$n \rightarrow \infty : \quad \overset{\dots\dots\dots}{x_v(k \Delta t)} = \overset{\dots\dots\dots}{x_v(m \Delta t)} = \dots = \ddot{x}_v. \quad (7.40)$$

Ali je v primeru, ko daljšamo čas opazovanja T in raste število realizacij signala n proti neskončno, $x'_v(t) = x'_i(t)$? Oziroma, ali je v tem primeru časovno povprečje (7.39) enako vzorčnemu povprečju (7.40):

$$\overset{\dots\dots\dots}{x(t)} = \ddot{x}_v? \quad (7.41)$$

Intuitivno razmišljanje, ki smo ga uporabili pri opisu zgornjega hipotetičnega eksperimenta, kaže na to, da sta povprečji enaki. Stroga matematična izpeljava zadostnih pogojev za enakost pa ni tako preprosta. Izkaže se, da predpostavka o stacionarnosti procesa, ki rodi naključni signal, za enakost časovnega in vzorčnega povprečja ni dovolj.

- Časovno povprečje je enako vzorčnemu povprečju naključnega signala v primeru, ko je stacionarni naključni proces, ki naključni signal rodi, *ergodičen*. Ergodičnost naključnega procesa imenujemo lastnost, da vsaka realizacija naključnega signala, ki ga proces oddaja, zavzame prav vse vrednosti svojega faznega prostora, v primeru, ko dopustimo, da je trajanje signala neomejeno.
- Če je fazni prostor stacionarnega naključnega signala zvezna množica (npr. interval ali cela realna os), je mogoče videti, da ergodična hipoteza ni nujno povsem izpolnjena. V takem primeru za enakost vzorčnega in časovnega povprečja zadošča že izpolnitev zahteve, da je sistem *kvazi ergodičen*. Zahteva po kvaziergodičnosti sistema je "milejša" od zahteve ergodičnosti. V tem primeru za vsako realizacijo naključnega signala zahtevamo, da se vrednost signala vsaki vrednosti iz faznega prostora poljubno natančno približa.

Dokazi o zadostnosti pogojev ergodičnosti oziroma kvazi ergodičnosti presegajo obseg tega dela. Bralec jih lahko najde na primer v [8].

Vzemimo, da je fazni prostor realnega stacionarnega naključnega signala zvezen. V najsplošnejšem primeru je to kar cela realna os. Ugotovimo najprej zvezo med natančnim časovnim povprečjem signala, ko gre čas opazovanja proti neskončno, in časovnim povprečjem njegovega približka (7.37).

Iz $\Delta t \rightarrow 0$ sledi:

$$\begin{aligned} \Delta t &\rightarrow dt, \\ k \Delta t &\rightarrow t, \\ \frac{1}{n} = \frac{\Delta t}{T} &\rightarrow \frac{dt}{T}, \\ \sum_{-n}^{-1} &\rightarrow \int_{-T}^0. \end{aligned}$$

Sedaj dobimo

$$\overset{\dots\dots}{x_i(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^{-1} x_i(k \Delta t) = \frac{1}{T} \int_{-T}^0 x_i(t) dt.$$

Ugotovili smo, da pri večanju časa opazovanja T proti neskončno časovno povprečje ni več odvisno od izbire realizacije $x_i(t)$ naključnega signala $x(t)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 x_i(t) dt = \overset{\dots\dots}{x(t)} \quad \forall i.$$

Ker gre za stacionarni proces, bo vrednost časovnega povprečja enaka, tudi če ga določimo na pozitivnem delu časovne osi:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Zato lahko zapišemo tudi

$$\overset{\dots\dots}{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt. \quad (7.42)$$

Glede na relacijo (7.32) lahko pri zvezni verjetnostni porazdelitvi amplitud vzorčno povprečje zapišemo kot

$$\overset{\dots\dots}{x_v} = E(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \quad (7.43)$$

Enakost časovnega in vzorčnega povprečja v stacionarnih naključnih procesih z zvezno verjetnostno porazdelitvijo amplitud izhodnih signalov lahko iz (7.42) in (7.43) zapišemo kot

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \quad (7.44)$$

V primeru diskretne porazdelitve končnega števila M različnih amplitud naključnega signala z upoštevanjem (7.17) dobimo

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt = \sum_{j=1}^M x_j P(x_j). \quad (7.45)$$

Enakost med časovnim in vzorčnim povprečjem lahko posplošimo na poljuben omejen funkcijski izraz $F(x(t))$ naključnega signala $x(t)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T F(x(t)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) p(x) dx.$$

7.2.5.1 Časovno in vzorčno povprečje drugega reda

Avtokorelacija

Pri izpolnjenem pogoju stacionarnosti sistema v širšem smislu lahko v primeru, ko gre za ergodične oziroma kvazi ergodične naključne procese, enakost med časovnim in vzorčnim povprečjem posplošimo tudi na vzorčna povprečja drugega reda. Za avtokorelacijo $\varphi_{xx}(\tau)$ realnega naključnega signala $x(t)$ tako dobimo

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt = R_{xx}(\tau).$$

V primeru zvezne verjetnostne porazdelitve amplitud naključnega signala $x(t)$ iz (7.36) sledi

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2.$$

V primeru diskretne verjetnostne porazdelitve končnega števila M različnih amplitud pa

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M x_i x_j P(x_i, x_j; \tau). \quad (7.46)$$

Komentar

Tako smo ugotovili, da lahko v stacionarnih ergodičnih oziroma kvazi ergodičnih sistemih avtokorelacijo naključnega signala določimo na dva načina: s časovnim ali vzorčnim povprečjem. Avtokorelacijo $\varphi_{xx}(\tau)$ lahko v tem primeru razumemo tudi kot avtokorelacijsko funkcijo $R_{xx}(\tau)$. Velikost avtokorelacije ob nekem časovnem zamiku τ zato v tem primeru pomeni tudi merilo, za koliko bodo amplitude naključnega signala čez čas τ še odvisne od njegove trenutne vrednosti.

Glede na tako interpretacijo je razumljiva tudi lastnost avtokorelacije stacionarnih naključnih signalov, da doseže svojo največjo vrednost ravno ob času $\tau = 0$:

$$\varphi(0) \geq |\varphi(\tau)| ,$$

saj gre v tem primeru za popolno odvisnost.

Lastnost, da je vrednost avtokorelacije za $\tau = \pm\infty$ enaka 0,

$$\varphi(\pm\infty) = 0 ,$$

utemeljimo s tem, da odvisnosti med amplitudami signala zaradi neskončnega časovnega zamika ni. Zadnji pogoj je seveda izpolnjen v primeru, ko je srednja vrednost signala enaka 0 in zato korelacija kar enaka kovarianci¹³. Vse lastnosti avtokorelacije stacionarnih naključnih signalov smo sicer navedli že v razdelku 7.1.1.

Križna korelacija

Podobno kot smo definirali avtokorelacijo s časovnim in vzorčnim povprečjem, to lahko naredimo tudi za križno korelacijo $\varphi_{xy}(\tau)$ dveh stacionarnih naključnih signalov $x(t)$ in $y(t)$:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt = R_{xy}(\tau) . \quad (7.47)$$

Kot avtokorelacijo tudi križno korelacijo izrazimo glede na vrsto verjetnostne porazdelitve amplitud naključnih signalov $x(t)$ in $y(t)$. Pri zvezni porazdelitvi (7.34) dobimo

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$

in pri diskretni porazdelitvi (7.26)

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau)dt = \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} x_i x_j P(x_i, x_j; \tau) .$$

Pri tem $p(x_1, x_2; \tau)$ pomeni gostoto verjetnosti dogodka, da je

$$x(t) = x_1 \quad \wedge \quad y(t+\tau) = x_2 ,$$

$P(x_i, x_j; \tau)$ pa verjetnost dogodka, da je

$$x(t) = x_i \quad \wedge \quad y(t+\tau) = x_j .$$

M_x in M_y sta zaporedoma števili različnih možnih amplitud signalov $x(t)$ $y(t)$.

¹³Glej razdelek 7.2.3 o korelacijski in kovariančni funkciji.

7.2.5.2 Lastnosti križne korelacije stacionarnih naključnih signalov

Kot avtokorelacija stacionarnega naključnega signala je tudi križna korelacija $\varphi_{xy}(\tau)$ deterministični signal, ki izpolnjuje naslednje lastnosti:

1. Antisimetričnost

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}(-\tau)$$

Lastnost izpeljemo na enak način kot pri determinističnih signalih.

2. Limitna vrednost pri $\tau = \pm\infty$

Za povsem¹⁴ naključna signala $x(t)$ in $y(t)$ velja

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_{xy}(\tau) = 0.$$

Utemeljitev te lastnosti je enaka kot pri avtokorelaciji.

3. Wienerjev izrek

Za križno korelacijo stacionarnih naključnih signalov obstajata Fourierova in inverzna Fourierova transformacija:

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ \varphi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned}$$

Bralec lahko dokaz tega izreka poišče v [1].

4. Zveznost

Križna korelacija dveh stacionarnih naključnih signalov je zvezna, če sta signala vsaj odsekoma zvezna, kar utemeljimo enako, kot smo to naredili pri determinističnih signalih.

7.3 Poissonov naključni proces

- Naključno pojavljanje natanko določenega dogodka imenujemo naključni tok dogodkov. Če je naključni proces Poissonov, za tok dogodkov velja:

1. **neodvisnost** – dogodki so neodvisni,
2. **stacionarnost** – povprečno število dogodkov v časovni enoti je κ in je konstantno (od časa neodvisno),
3. **ordinarnost** – verjetnost, da se več dogodkov zgodi hkrati, je enaka 0.

¹⁴S tem mislimo, da signalov $x(t)$ in $y(t)$ ne moremo predstaviti s kombinacijo deterministične in naključne komponente. To pomeni tudi, da je srednja vrednost obeh signalov enaka 0

$$E(x(t)) = E(y(t)) = 0.$$

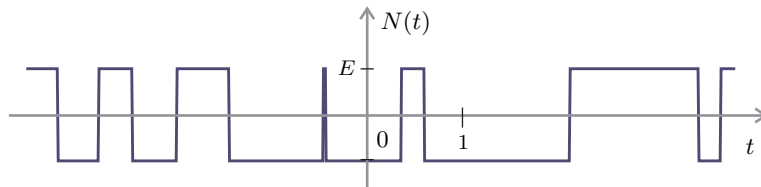
Za Poissonov proces lahko izvedemo naslednjo verjetnostno porazdelitev [9]. Naj bo $P_n(t)$ verjetnost, da se v časovnem intervalu dolžine t zgodi n dogodkov. Ta verjetnost je

$$P_n(t) = \frac{(\kappa t)^n e^{-\kappa t}}{n!}. \quad (7.48)$$

■ Poissonovi naključni signali so signali, ki jih rodi Poissonov naključni proces. Oglejmo si nekaj primerov.

Primer 7.2

Kot smo omenili že v primeru 7.1, je Poissonov val $N(t)$ stacionarni naključni signal z zalogo vrednosti $\{+E, -E\}$, kjer se predznak amplitude naključno spreminja (slika 7.4). Naključne spremembe predznaka signala tvorijo tok dogodkov, ki mora izpolnjevati lastnosti Poissonovega procesa. Določimo avtokorelacijo $\varphi_{NN}(\tau)$ in



Slika 7.4: Možna realizacija dela poteka Poissonovega vala $N(t)$ pri $\kappa = 1, 5$.

spekter močnostne gostote $\phi_{NN}(\omega)$ Poissonovega vala!

Rešitev

Ker je Poissonov val naključni signal, ki zavzame samo dve vrednosti, lahko njegovo avtokorelacijo določimo z vzorčnim povprečjem za primer diskretne verjetnostne porazdelitve (7.46):

$$\varphi_{NN}(\tau) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_i x_j P(x_i, x_j; \tau).$$

Verjetnost $P(x_i, x_j; \tau)$ lahko zapišemo kot

$$P(x_i, x_j; \tau) = P(x_i)P(x_j|x_i; \tau),$$

kjer $P(x_i)$ pomeni verjetnost dogodka, da signal ob času t zavzame vrednost x_i , in $P(x_j|x_i; \tau)$ pogojno verjetnost, da signal ob času $t + \tau$ zavzame vrednost x_j , če ima ob času t vrednost x_i . Tako dobimo

$$\varphi_{NN}(\tau) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 x_i x_j P(x_i)P(x_j|x_i; \tau).$$

Ker je $x_i \in \{+E, -E\}$, lahko vzamemo, da je

$$x_1 = E, \quad x_2 = -E$$

in za $\varphi_{NN}(\tau)$ zapišemo

$$\begin{aligned}\varphi_{NN}(\tau) &= E \cdot E \cdot P(E)P(E|E; \tau) \\ &\quad + (-E) \cdot (-E) \cdot P(-E)P(-E|-E; \tau) \\ &\quad + E \cdot (-E) \cdot P(E)P(-E|E; \tau) \\ &\quad + (-E) \cdot E \cdot P(-E)P(E|-E; \tau) .\end{aligned}\quad (7.49)$$

Ker so spremembe predznaka signala neodvisne (Poissonov proces), je

$$P(E) = P(-E) .$$

To sta edina možna dogodka. Ker sta nezdružljiva, velja tudi

$$P(E) + P(-E) = 1 .$$

In zato

$$P(E) = P(-E) = \frac{1}{2} .\quad (7.50)$$

Do dogodka, da ima signal vrednost $+E$, če je imel pred časom τ vrednost $+E$, lahko pride tako, da signal v času τ ne spremeni predznaka ali pa ga spremeni sodokrat. Zato in zaradi (7.48) je

$$\begin{aligned}P(E|E; \tau) &= P(B_0(\tau) \cup B_2(\tau) \cup B_4(\tau) \cup \dots) \\ &= P(B_0(\tau)) + P(B_2(\tau)) + P(B_4(\tau)) + \dots \\ &= \sum_{i=\text{sod}} P_i(\tau) = \sum_{i=\text{sod}} \frac{(\kappa\tau)^i e^{-\kappa\tau}}{i!} .\end{aligned}\quad (7.51)$$

Pri tem z $B_i(\tau)$ označimo dogodek, da je v časovnem intervalu dolžine τ prišlo do i sprememb predznaka signala $N(t)$.

Ker do dogodka, da ima signal vrednost $-E$, če je imel pred časom τ vrednost $-E$, pride na enak način, je

$$P(-E|-E; \tau) = P(E|E; \tau) .\quad (7.52)$$

Prav tako lahko izpeljemo, da je

$$P(-E|E; \tau) = P(E|-E; \tau) = \sum_{i=\text{lih}} \frac{(\kappa\tau)^i e^{-\kappa\tau}}{i!} .\quad (7.53)$$

Iz (7.49), (7.50), (7.51), (7.52) in (7.53) sledi

$$\begin{aligned}\varphi_{NN}(\tau) &= 2E^2 \frac{1}{2} \sum_{i=\text{sod}} \frac{(\kappa\tau)^i e^{-\kappa\tau}}{i!} - 2E^2 \frac{1}{2} \sum_{i=\text{lih}} \frac{(\kappa\tau)^i e^{-\kappa\tau}}{i!} \\ &= E^2 e^{-\kappa\tau} \left(1 - \frac{(\kappa\tau)^1}{1!} + \frac{(\kappa\tau)^2}{2!} - \frac{(\kappa\tau)^3}{3!} + \dots \right) \\ &= E^2 e^{-2\kappa\tau} .\end{aligned}$$

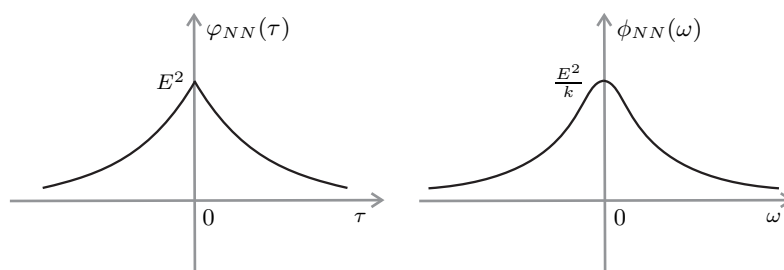
Zgornja izpeljava velja za $\tau > 0$. Da bo avtokorelacija določena tudi za negativne τ , upoštevamo (7.2), da je

$$\varphi_{NN}(-\tau) = \varphi_{NN}(\tau).$$

Zato je

$$\varphi_{NN}(\tau) = E^2 e^{-2\kappa|\tau|}$$

za vse τ .



Slika 7.5: Avtokorelacija $\varphi_{NN}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{NN}(\omega)$ Poissonovega vala

Spekter močnostne gostote $\phi_{NN}(\omega)$ je določen s Fourierovo transformacijo avtokorelacije $\varphi_{NN}(\tau)$. Ker je $\varphi_{NN}(\tau)$ po (7.2) soda realna funkcija, velja:

$$\begin{aligned} \phi_{NN}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{NN}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 E^2 e^{2\kappa\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} E^2 e^{-2\kappa\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{E^2}{2\kappa - j\omega} e^{(2\kappa - j\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{E^2}{2\kappa + j\omega} e^{-(2\kappa + j\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{E^2(2\kappa - j\omega + 2\kappa + j\omega)}{4\kappa^2 + \omega^2} = \frac{4\kappa E^2}{4\kappa^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

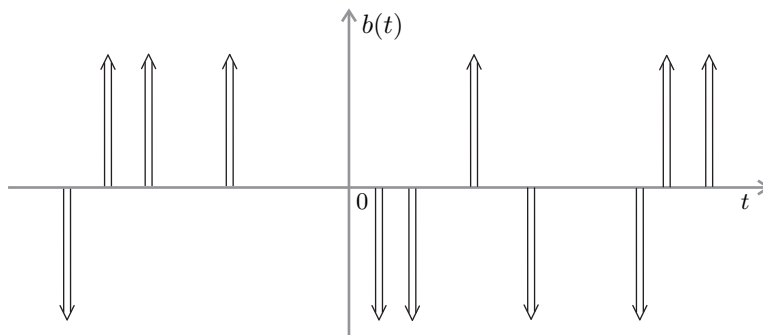
Komentar

Poteka avtokorelacije $\varphi_{NN}(\tau)$ in spektra močnostne gostote $\phi_{NN}(\omega)$ sta prikazana na sliki 7.5. Iz poteka $\varphi_{NN}(\tau)$ je razvidno, da je to zvezna funkcija z največjo vrednostjo pri $\tau = 0$, ki izzveni, ko gre τ proti $\pm\infty$. Opazimo tudi, da je $\phi_{NN}(\omega)$ pozitivna funkcija. Vse to so splošne lastnosti avtokorelacije stacionarnih naključnih signalov, ki smo jih navedli v 7.1.1.

Primer 7.3

Naključni signal $b(t)$ naj predstavljajo po času naključno porazdeljeni enotini impulzi, ki enako verjetno nastopijo s pozitivnim ali z negativnim predznakom (slika 7.6). Tok dogodkov pojavitve enotinega impulza naj izpolnjuje lastnosti Poissonovega procesa. Tak naključni signal navadno imenujemo *beli šum*.

Določimo avtokorelacijo $\varphi_{bb}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{bb}(\omega)$ belega šuma $b(t)$.

Slika 7.6: Beli šum $b(t)$ **Rešitev**

Namesto naključnega zaporedja pozitivnih in negativnih enotinih impulzov opazujemo tako zaporedje pravokotnih impulzov širine $d\tau$ in višine A s površino 1, ko gre $A \rightarrow \infty$ ($A \cdot d\tau = 1$). Tak signal ima lahko tri vrednosti: $A, -A, 0$. Zato bo njegova avtokorelacija, izražena z zmnožki brezpogojne in pogojne verjetnosti, enaka

$$\varphi_{bb}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j P(x_i) P(x_j | x_i; \tau).$$

Vzemimo, da je

$$x_1 = A, \quad x_2 = -A, \quad x_3 = 0.$$

Tedaj je

$$P(x_1) = P(x_2) = \frac{\kappa d\tau}{2}.$$

Naj bo $\tau = 0$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \varphi_{bb}(0) &= \sum_{i=1}^3 x_i^2 P(x_i) = A^2 \frac{\kappa d\tau}{2} + (-A)^2 \frac{\kappa d\tau}{2} \\ &= \kappa A^2 d\tau. \end{aligned}$$

Ko gre $A \rightarrow \infty$ (iz pravokotnih preidemo na enotine impulze), dobimo:

$$\varphi_{bb}(0) = \lim_{A \rightarrow \infty} \kappa A^2 d\tau = \kappa \delta(0).$$

Naj bo $\tau \neq 0$. Ker se impulzi pojavljajo neodvisno eden od drugega, je

$$P(x_j | x_i; \tau) = P(x_j).$$

Zato je

$$\varphi_{bb}(\tau) = \lim_{A \rightarrow \infty} (A \cdot A + (-A) \cdot (-A) + (-A) \cdot A + A \cdot (-A)) \frac{\kappa d\tau}{2} \frac{\kappa d\tau}{2} = 0.$$

Avtokorelacija belega šuma je potemtakem

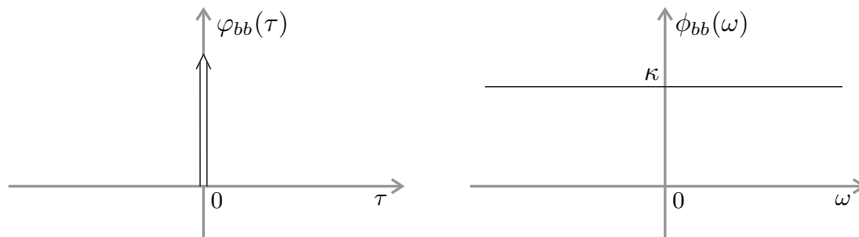
$$\varphi_{bb}(\tau) = \kappa \delta(\tau). \quad (7.54)$$

Spekter močnostne gostote belega šuma je

$$\phi_{bb}(\omega) = \mathcal{F}(\varphi_{bb}(\tau)) = \mathcal{F}(\kappa \delta(\tau)) = \kappa.$$

Komentar

Zaradi lastnosti, da je spekter močnostne gostote naključnega signala $b(t)$ konstanten preko cele frekvenčne osi, je signal $b(t)$ dobil ime *beli šum*. To je naključni signal, v katerem so vse frekvence enakomerno zastopane.



Slika 7.7: Avtokorelacija $\varphi_{bb}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{bb}(\omega)$ belega šuma

Slika 7.7 prikazuje avtokorelacijo $\varphi_{bb}(\tau)$ belega šuma in njegov spekter močnostne gostote $\phi_{bb}(\omega)$. Kot vidimo, avtokorelacija tega signala ni zvezna v izhodišču. Tam je tudi neomejena:

$$\varphi_{bb}(0) = P_b = \kappa \delta(0) = \infty.$$

Signal $b(t)$ torej ni močnosten!

Ker je

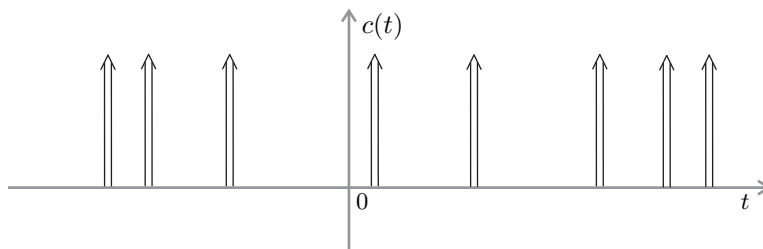
$$\varphi_{bb}(\tau) = 0 \quad \tau \neq 0,$$

odvisnosti med amplitudami

$$b(t) \text{ in } b(t + \tau), \quad \tau \neq 0,$$

belega šuma pri različnih časovnih trenutkih ni. S to lastnostjo beli šum v smislu “*naključnosti*” predstavlja mejnik v prostoru naključnih signalov.

Poglejmo še dve različici Poissonovega naključnega toka enotinih impulzov.



Slika 7.8: Naključni signal pozitivnih enotinih impulzov $c(t)$, ki tvorijo Poissonov tok dogodkov.

Primer 7.4

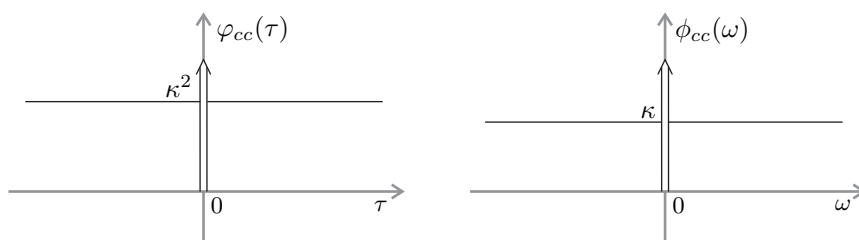
Naj bo $c(t)$ Poissonov naključni tok samih pozitivnih enotinih impulzov (slika 7.8). Določimo avtokorelacijo $\varphi_{cc}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{cc}(\omega)$ signala $c(t)$.

Rešitev

Podobno kot smo to storili v primeru 7.3, tudi sedaj lahko določimo njegovo avtokorelacijo $\varphi_{cc}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{cc}(\omega)$.

Dobimo:

$$\begin{aligned}\varphi_{cc}(\tau) &= \kappa\delta(\tau) + \kappa^2, \\ \phi_{cc}(\omega) &= \kappa + 2\pi\kappa^2\delta(\omega).\end{aligned}$$



Slika 7.9: Avtokorelacija $\varphi_{cc}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{cc}(\omega)$ naključnega signala $c(t)$

Poteka avtokorelacije $\varphi_{cc}(\tau)$ in spektra močnostne gostote $\phi_{cc}(\omega)$ signala $c(t)$ sta podana na sliki 7.9.

Komentar

Avtokorelacija $\varphi_{cc}(\tau)$ ne izpolnjuje lastnosti

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_{cc}(\tau) = 0,$$

ker je srednja vrednost naključnega signala $c(t)$ različna od 0.

Iz ocene

$$\int_{-T}^T c(t) dt \approx \kappa \cdot 2T,$$

v limiti dobimo

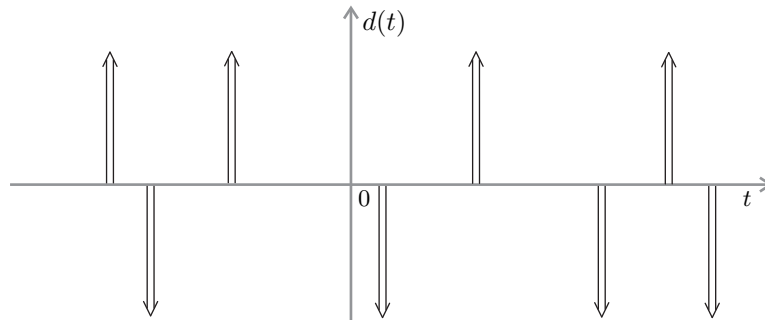
$$\overline{c(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T c(t) dt = \kappa.$$

Avtokorelacija $\varphi_{cc}(\tau)$ je še en primer signala, ki je invarianten na Fourierovo transformacijo, saj je tako signal $\varphi_{cc}(\tau)$ kot njegov spekter $\phi_{cc}(\omega)$ izražen kot vsota enotnega impulza in pozitivne konstante.

Tudi naključni signal $c(t)$ ni močnosten.

Primer 7.5

Naj bo $d(t)$ Poissonov naključni tok enotnih impulzov, ki se po predznaku izmenjujejo (slika 7.10). Določimo avtokorelacijo $\varphi_{dd}(\tau)$ in spekter močnostne gostote



Slika 7.10: Naključni signal po predznaku izmenjujočih se enotnih impulzov $d(t)$

$\phi_{dd}(\omega)$ signala $d(t)$.

Rešitev

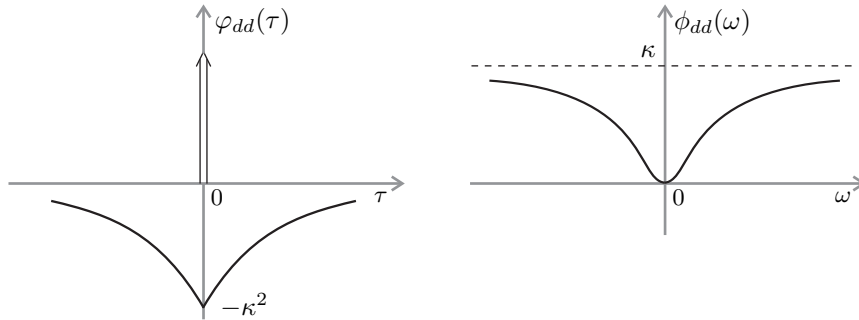
Na podoben način kot v primeru 7.3 bi lahko tudi tokrat določili avtokorelacijo $\varphi_{dd}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{dd}(\omega)$ in dobili

$$\begin{aligned} \varphi_{dd}(\tau) &= \kappa \delta(\tau) - \kappa^2 e^{-2\kappa|\tau|}, \\ \phi_{dd}(\omega) &= \kappa - \frac{4\kappa^3}{4\kappa^2 + \omega^2} = \frac{\kappa\omega^2}{4\kappa^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Potek avtokorelacije $\varphi_{dd}(\tau)$ in spektra močnostne gostote $\phi_{dd}(\omega)$ je prikazan na sliki 7.11.

Komentar

Za razliko od belega šuma (primer 7.3) avtokorelacija $\varphi_{dd}(\tau)$ naključnega signala



Slika 7.11: Avtokorelacija $\varphi_{dd}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{dd}(\omega)$ naključnega signala $d(t)$

$d(t)$ ni enaka 0 za zamike τ , ki so različni od 0:

$$\varphi_{dd}(\tau) \neq 0, \quad \tau \neq 0.$$

V signalu $d(t)$ lahko vsaj delno predvidimo dogajanje v prihodnosti, saj pozitivnemu enotinem impulzu vedno sledi negativni in obratno.

Ker je povprečna vrednost $\overline{d(t)} = 0$, je v tem primeru izpolnjena tudi lastnost

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \varphi_{dd}(\tau) = 0$$

in je zato tudi spekter $\phi_{dd}(\omega)$ povsod končna funkcija.

Zaradi

$$\varphi_{dd}(0) = \infty$$

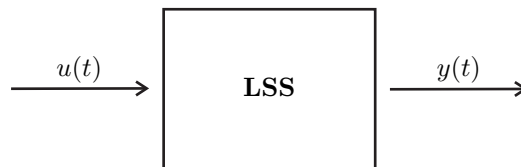
naključni signal $d(t)$ prav tako ni močnosten.

Literatura

- [1] Y. W. Lee: D. Spectrums of Amplitude and Phase spectrums of Energy and Power, *Statistical Theory of Communication*, John Wiley & Sons, Inc., 1960, str. 79–96.
- [2] Y. W. Lee: C. Random Functions, *Statistical Theory of Communication*, John Wiley & Sons, Inc., 1960, str. 50–78.
- [3] G. Tomšič, T. Slivnik: 5.4.1 Matematično upanje – povprečna vrednost, *Matematika IV*, Založba FE in FRI, 2004, str. 163–165.
- [4] G. Tomšič, T. Slivnik: 5.1 Osnovni pojmi teorije verjetnosti, *Matematika IV*, Založba FE in FRI, 2004, str. 137–148.
- [5] R. Jamnik: Limitni izreki, *Višja matematika II*, izdal I. Vidav, DZS, Ljubljana 1975, str. 502–510.
- [6] G. Tomšič, T. Slivnik: 5.3 Porazdelitve, *Matematika IV*, Založba FE in FRI, 2004, str. 151–163.
- [7] R. Jamnik: Korelacijski koeficient, *Višja matematika II*, izdal I. Vidav, DZS, Ljubljana 1975, str. 492–494.
- [8] N. Wiener: *Cybernetics*, John Wiley & Sons, New York, 1948, str. 57–73.
- [9] S. Ross: 2. The Poisson Process, *Stochastic Processes, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996, str. 59–97.

8. Uporaba korelacijskih transformacij pri obdelavi signalov

8.1 Prevajanje signalov preko linearnih stacionarnih sistemov



Slika 8.1: Linearni stacionarni sistem (LSS) z vhodnim $u(t)$ in izhodnim signalom $y(t)$

Linearnost in stacionarnost sistema z enim vhodnim in enim izhodnim signalom (slika 8.1) definiramo z naslednjimi lastnostmi:

Linearnost

Naj bosta $u_1(t)$ in $u_2(t)$ dva poljubna vhodna signala ter $y_1(t)$ in $y_2(t)$ pripadajoča izhodna signala:

$$u_1(t) \longrightarrow y_1(t) \quad \text{in} \quad u_2(t) \longrightarrow y_2(t) .$$

Vhodnemu signalu $u_1(t) + u_2(t)$ v linearnem sistemu vedno pripada izhodni signal $y_1(t) + y_2(t)$:

$$u_1(t) + u_2(t) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t) .$$

Iz definicije linearnosti hitro izpeljemo veljavnost linearnosti za poljubno število $N > 2$ vhodnih signalov:

$$u_i(t) \longrightarrow y_i(t) \implies \sum_{i=1}^N u_i(t) \longrightarrow \sum_{i=1}^N y_i(t)$$

in lastnost sorazmernosti:

$$u(t) \longrightarrow y(t) \implies \alpha u(t) \longrightarrow \alpha y(t) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} .$$

Stacionarnost

Naj bo $u(t)$ poljuben vhodni signal in $y(t)$ pripadajoči izhodni signal:

$$u(t) \longrightarrow y(t) .$$

Sistem je stacionaren, če za poljubni časovni zamik t_0 velja

$$u(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0) .$$

8.1.1 Zveza med vhodnim in izhodnim signalom v linearnih stacionarnih sistemih

- Vzemimo, da je vhodni signal v linearni stacionarni sistem enak enotnemu impulzu $\delta(t)$. Odziv sistema na enotni impulz označimo s $h(t)$. Ker je signal $h(t)$ odziv sistema na vhodni signal ob času 0, je zaradi principa vzročnosti¹ lahko različen od 0 le za $t \geq 0$ oziroma

$$h(t) = 0 , \quad t < 0 . \quad (8.1)$$

Naj bo $u(t)$ poljubni vodni signal, ki je različen od 0 od časovnega trenutka a dalje:

$$u(t) = 0 \iff t < a . \quad (8.2)$$

Signalu $u(t)$ priredimo signal $\hat{u}(t)$, tako da časovno os t razdelimo na podintervale širine Δt in konstantno amplitudo signala $\hat{u}(t)$ na vsakem podintervalu določimo z amplitudo signala $u(t)$ v levem krajišču podintervala (slika 8.2). Ko manjšamo širino Δt , velja

$$\lim_{\Delta t \rightarrow dt} \hat{u}(t) = u(t) .$$

Označimo z $dy(t)$ delni odziv sistema na del signala $\hat{u}(t)$ s časovnega intervala $[\tau, \tau + \Delta t)$ (slika 8.2). Ta del signala predstavlja, ko gre $\Delta t \rightarrow d\tau$, infinitezimalno ozek pravokoten impulz s končno amplitudo $u(\tau)$ ob času τ . Podoben impulz je funkcija $\delta(t - \tau)$, ki ima površino 1. Zaradi stacionarnosti je

$$\delta(t - \tau) \longrightarrow h(t - \tau) .$$

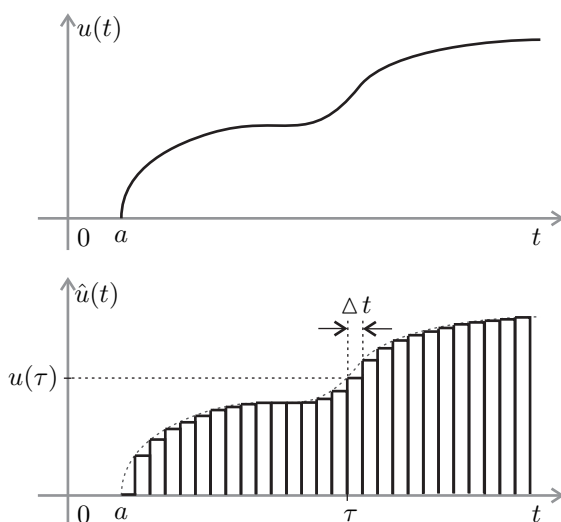
Zaradi lastnosti sorazmernosti, ki velja v linearnih sistemih, lahko iz primerjave ploščin vhodnih impulzov zapišemo

$$\frac{u(\tau)d\tau}{1} = \frac{dy(t)}{h(t - \tau)}$$

in dobimo

$$dy(t) = u(\tau)h(t - \tau)d\tau .$$

¹Princip vzročnosti (kavzalnosti) pravi, da posledica ne more nastopiti pred svojim vzrokom.



Slika 8.2: Vhodni signal $u(t)$ in prirejeni signal $\hat{u}(t)$

Na izhodni signal $y(t)$ vplivajo vsi tisti deli vhodnega signala $u(\tau)$, kjer je $\tau \leq t$. Zaradi linearnosti sistema lahko celoten odziv $y(t)$ zapišemo kot integral delnih odzivov $dy(t)$:

$$y(t) = \int_a^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau . \quad (8.3)$$

Zaradi (8.1) in (8.2) je

$$y(t) = \int_a^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = u(t) * h(t) . \quad (8.4)$$

Izhodni signal v linearnem stacionarnem sistemu je torej enak konvoluciji vhodnega signala in odziva sistema na enotin impulz. Ker je konvolucija simetrična, velja tudi

$$y(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{t-a} h(\tau)u(t-\tau)d\tau .$$

Pri obravnavi linearnih stacionarnih sistemov je odziv sistema $h(t)$ na enotin impulz zelo pomemben signal, saj je z njim mogoče odziv sistema na poljubni vhodni signal vnaprej določiti.

- Fourierovo transformacijo impulznega odziva

$$H(\omega) = \mathcal{F}(h(t))$$

imenujemo *prevajalna funkcija linearne stacionarne sistema*.

Iz lastnosti konvolucije neperiodičnih signalov (6.18) sledi

$$y(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega)$$

in od tod

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{U(\omega)}. \quad (8.5)$$

Enačba (8.5) velikokrat nudi možnost za določitev prevajalne funkcije sistema in z uporabo inverzne Fourierove transformacije

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\omega)),$$

določitev impulznega odziva $h(t)$. Potrebujemo le znan par signalov $u(t) \rightarrow y(t)$, katerih Fourierovi transformaciji² je možno izračunati.

8.1.2 Vhodni signal je stacionarni naključni signal

Vzemimo, da je vhodni signal $u(t)$ v linearni stacionarni sistem stacionarni naključni signal. Zveza med vhodnim in izhodnim signalom (8.5) je še vedno veljavna. Izhodni signal $y(t)$ je v tem primeru tudi stacionarni naključni signal. Vzemimo, da je pri obravnavi linearnega stacionarnega sistema situacija taka, da ne moremo vplivati na potek oziroma izbiro vhodnega signala. Ker Fourierova transformacija stacionarnih naključnih signalov ne obstaja (glej razdelek 7.1), si v tem primeru pri določitvi prevajalne funkcije sistema $H(\omega)$ in impulznega odziva $h(t)$ ne moremo pomagati z enačbo (8.5).

Iz lastnosti stacionarnih naključnih signalov vemo, da je njihova avtokorelacija deterministični signal (7.1), za katerega je mogoče določiti Fourierovo in inverzno Fourierovo transformacijo (7.5). Izvedimo zvezo med avtokorelacijo izhodnega in avtokorelacijo vhodnega signala!

Zapišimo izraz za izračun avtokorelacije izhodnega signala s časovnim povprečjem (7.1), upoštevajmo zvezo med vhodnim in izhodnim signalom (8.5) ter zamenjajmo vrstni red integriranja in limitiranja:

$$\begin{aligned} \varphi_{yy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t+\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma)u(t-\sigma)d\sigma \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\gamma)u(t+\tau-\gamma)d\gamma \right\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma)u(t-\sigma) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\gamma)u(t+\tau-\gamma)d\gamma \right] d\sigma \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\gamma) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t-\sigma)u(t+\tau-\gamma)dt \right] d\gamma \right\} d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\gamma)\varphi_{uu}(\sigma+\tau-\gamma)d\gamma \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

² $H(\omega)$ lahko iz 8.5 določimo le za frekvence ω , kjer je $U(\omega) \neq 0$.

Vpeljimo novo spremenljivko $t = \gamma - \sigma$ in še enkrat zamenjajmo vrstni red integriranja:

$$\begin{aligned}\varphi_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t + \sigma) \varphi_{uu}(\tau - t) dt \right\} d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) h(t + \sigma) d\sigma \right\} \varphi_{uu}(\tau - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{hh}(t) \varphi_{uu}(\tau - t) dt \\ &= \varphi_{hh}(\tau) * \varphi_{uu}(\tau).\end{aligned}$$

Avtokorelacija izhodnega stacionarnega naključnega signala je potemtakem enaka konvoluciji avtokorelacije odziva sistema na enotni impulz in avtokorelacije vhodnega stacionarnega naključnega signala:

$$\varphi_{yy}(\tau) = \varphi_{hh}(\tau) * \varphi_{uu}(\tau). \quad (8.6)$$

Zaradi eksistence Fourierove transformacije avtokorelacije stacionarnih naključnih signalov (7.5) lahko zvezo (8.6) zapišemo tudi v frekvenčnem prostoru:

$$\phi_{yy}(\omega) = \phi_{hh}(\omega) \cdot \phi_{uu}(\omega). \quad (8.7)$$

Ker je zaradi (6.7)

$$\phi_{hh}(\omega) = |H(\omega)|^2,$$

je

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\phi_{yy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)}.$$

Iz zveze (8.7) lahko določimo le spekter amplitudne gostote prevajalne funkcije sistema $|H(\omega)|$. V nekaterih primerih to že zadostuje, če pa želimo določiti prevajalno funkcijo v celoti, je potrebno poiskati povezavo za križno korelacijo $\varphi_{uy}(\tau)$ vhodnega in izhodnega stacionarnega naključnega signala:

$$\begin{aligned}\varphi_{uy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) y(t + \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) u(t + \tau - \sigma) d\sigma \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t) u(t + \tau - \sigma) dt \right\} d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) \varphi_{uu}(\tau - \sigma) d\sigma = h(\tau) * \varphi_{uu}(\tau).\end{aligned}$$

V frekvenčnem prostoru dobimo enačbo

$$\phi_{uy}(\omega) = H(\omega) \cdot \phi_{uu}(\omega),$$

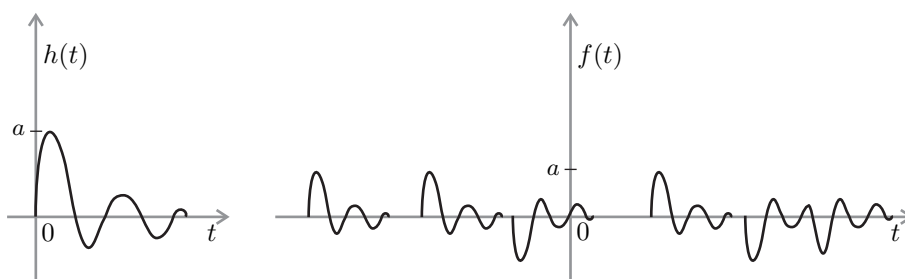
iz katere lahko določimo prevajalno funkcijo sistema:

$$H(\omega) = \frac{\phi_{uy}(\omega)}{\phi_{uu}(\omega)}.$$

8.2 Poissonovi stacionarni naključni signali

Zvezo med vhodnim in izhodnim signalom v linearnem stacionarnem sistemu lahko uporabimo za modeliranje in določitev nekaterih lastnosti stacionarnih naključnih signalov.

Naj naključni signal $f(t)$ sestavljajo motnje natanko določene oblike $h(t)$, ki se v času naključno, vendar stacionarno pojavljajo enako verjetno s pozitivnim ali negativnim predznakom. Povprečno število motenj na časovno enoto κ je konstantno. Hipotetična poteka naključnega signala $f(t)$ in oblike motnje $h(t)$ sta podana na sliki 8.3.



Slika 8.3: Motnja $h(t)$ in prirejen naključni signal $f(t)$

Motnja $h(t)$ naj bo energijski signal, za katerega velja

$$h(t) = 0, \quad t < 0.$$

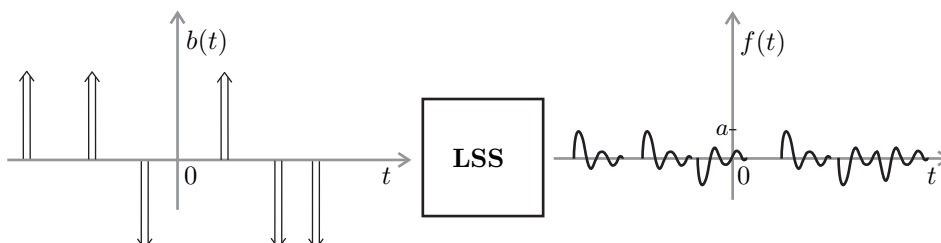
Naključni signal $f(t)$ bi lahko zapisali kot

$$f(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i h(t - t_i), \quad a_i \in \{+1, -1\}, \quad (8.8)$$

kjer so t_i naključni časovni trenutki, ko se motnja pojavi, a_i pa naključne spremenljivke, ki lahko z enako verjetnostjo zavzamejo vrednosti $+1$ ali -1 . Če tok dogodkov, ki ga predstavljajo naključno ponavljajoče se motnje, zadošča pogojem Poissonovega procesa, je $f(t)$ Poissonov signal.

Signal $f(t)$ si lahko predstavimo tudi kot izhodni signal iz linearnega stacionarnega sistema z impulznim odzivom $h(t)$ in vhodnim signalom, ki je enak belemu šumu $b(t)$, ki smo ga opredelili v razdelku 7.3 (slika 8.4). Tako razmišljanje lahko uporabimo za določitev avtokorelacije $\varphi_{ff}(\tau)$, tako da uporabimo zvezo med avtokorelacijami vhodnega in izhodnega signala (8.6):

$$\varphi_{ff}(\tau) = \varphi_{hh}(\tau) * \varphi_{bb}(\tau).$$



Slika 8.4: Vhodni signal $b(t)$, linearni stacionarni sistem z impulznim odzivom $h(t)$ in izhodni signal $f(t)$

Ker je po (7.54)

$$\varphi_{bb}(\tau) = \kappa \delta(\tau)$$

in ker je funkcija $\delta(\tau)$ enota za konvolucijo (6.21), je

$$\varphi_{ff}(\tau) = \varphi_{hh}(\tau) * \kappa \delta(\tau) = \kappa \varphi_{hh}(\tau) . \quad (8.9)$$

Pri tem $\varphi_{hh}(\tau)$ določimo iz (6.3) kot avtokorelacijo neperiodičnega determinističnega signala. Spekter močnostne gostote $\phi_{ff}(\omega)$ signala $f(t)$ je tedaj

$$\phi_{ff}(\omega) = \kappa \phi_{hh}(\omega) = \kappa |H(\omega)|^2 .$$

Podobno bi lahko določili tudi avtokorelacije in spektre močnostne gostote Poissonovih naključnih signalov, ki bi jih namesto iz belega šuma $b(t)$ pridobili z njegovimi različicami $c(t)$ in $d(t)$, kot smo jih definirali v poglavju 7 v primerih 7.4 in 7.5.

Primer 8.1

Naj bo $e(t)$ naključni signal, kot smo ga definirali z (8.8). Pri tem naj bo potek motnje $g(t)$ podan z

$$g(t) = \begin{cases} A e^{-at}, & t > 0, \quad A, a > 0 \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$

Del možne realizacije naključnega signala $e(t)$ je podan na sliki 8.5.

Določimo avtokorelacijo $\varphi_{ee}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{ee}(\omega)$ signala $e(t)$!

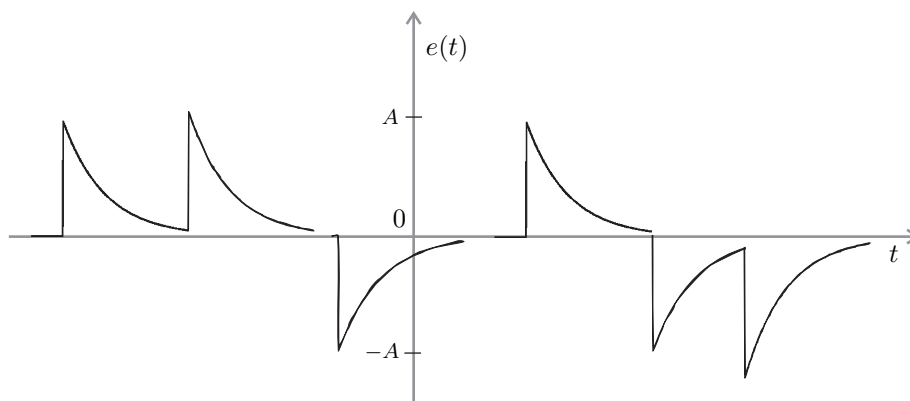
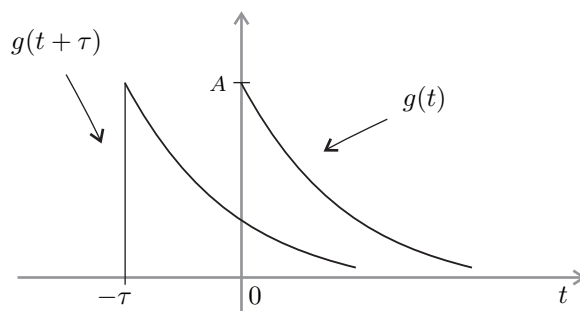
Rešitev

Iz enačbe (8.9) sledi

$$\varphi_{ee}(\tau) = \kappa \varphi_{gg}(\tau) .$$

Avtokorelacija signala $g(t)$ pa je

$$\varphi_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt .$$

Slika 8.5: Signal $e(t)$ Slika 8.6: Signala $g(t)$ in $g(t + \tau)$ za $\tau > 0$

Za $\tau > 0$ (slika 8.6) dobimo

$$\begin{aligned}\varphi_{gg}(\tau) &= \int_0^{\infty} A e^{-at} A e^{-a(t+\tau)} dt = A^2 e^{-a\tau} \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = -\frac{A^2}{2a} e^{-a\tau} e^{-2at} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{A^2}{2a} e^{-a\tau}.\end{aligned}$$

Ker je avtokorelacija realnih signalov soda funkcija (6.5), je

$$\varphi_{gg}(\tau) = \frac{A^2}{2a} e^{-a|\tau|}, \quad \text{za vsak } \tau$$

in zato

$$\varphi_{ee}(\tau) = \frac{\kappa A^2}{2a} e^{-a|\tau|}.$$

Spekter močnostne gostote $\phi_{ee}(\omega)$ je enak

$$\phi_{ee}(\omega) = \kappa |G(\omega)|^2.$$

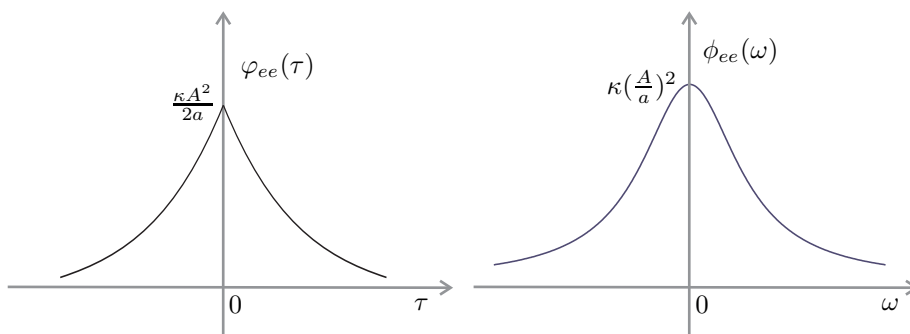
Spekter $|G(\omega)|$ za podoben signal smo že določili v primeru 5.1 in dobili

$$|G(\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}.$$

Zato je

$$\phi_{ee}(\omega) = \frac{\kappa A^2}{\omega^2 + a^2}.$$

Poteka avtokorelacije $\varphi_{ee}(\tau)$ in spektra močnostne gostote $\phi_{ee}(\omega)$ naključnega signala $e(t)$ sta podana na sliki 8.7.



Slika 8.7: Avtokorelacija $\varphi_{ee}(\tau)$ in spekter močnostne gostote $\phi_{ee}(\omega)$ naključnega signala $e(t)$

8.3 Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov

Odkrivanje periodične komponente iz ozadja šumov imenujemo postopke, ki ugotavljajo, ali je periodična komponenta v signalu sploh prisotna, kakšna je njena perioda in kakšen je njen potek. Predpostavke in nalogo bolj natančno definiramo na sledeč način.

Vzemimo, da signal $f(t)$ lahko predstavimo z vsoto

$$f(t) = S(t) + N(t). \quad (8.10)$$

Pri tem naj bo:

$S(t)$ močnostni periodični signal z osnovno periodo T_0 ,

$N(t)$ močnostni naključni signal, ki izvira iz stacionarnega naključnega procesa.

Zastavimo si naslednja vprašanja:

- Ali je $S(t) \neq 0$?
- Če je $S(t) \neq 0$, kolikšna je njegova perioda T_0 ?
- Kakšen je potek signala $S(t)$?

Znani so različni postopki obdelave signalov za reševanje te naloge. Med doslej najbolj razdelane spadajo pristopi, ki uporabljajo: kepsstralno analizo [1], določitev funkcije povprečja razlik amplitud (funkcija AMDF³) [2] in uporabo korelacije.

Razvoj postopkov za odkrivanje periodične komponente sežejo v obdobje 2. svetovne vojne in so povezani z iznajdbo radarja. Pri sprejemu radarskih valov imamo namreč opravka s situacijo, ki jo modelira enačba (8.10). Radarska antena, ki se vrti s krožno frekvenco ω_0 , oddaja signal v določeni ravnini in sprejema odboje. Če bo iz določene smeri (azimuta) prišlo do odboja, se bo ta, zaradi vrtenja antene, na sprejemniku manifestiral kot periodični signal s periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Doseg radarja je vedno omejen, njegov sprejem pa je možno oslabiti z namernim oddajanjem motenj. Razvoj prej omenjenih pristopov se je začel z namenom, da bi doseg radarskih naprav izboljšali in dosegli čim večjo neobčutljivost detekcije odbojev na dodani šum. Kasneje se je izkazalo, da je model predstavitve naključnega signala (8.10) in področje uporabe mnogo širše. V razdelku 8.3.3 si bomo ogledali, kako je postopke za odkrivanje periodične komponente mogoče uporabiti pri obdelavi govornih signalov.

8.3.1 Postopek z avtokorelacijo

Signal $f(t)$ obravnavamo kot realen *stacionarni naključni signal*. Po (7.1) je avtokorelacija $\varphi(\tau)$ takega signala, ki je deterministični signal, podana s časovnim povprečjem kot

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)f(t + \tau)dt .$$

Določimo odvisnost $\varphi(\tau)$ od signalov $S(t)$ in $N(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= S(t) + N(t) , \\ \varphi(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (S(t) + N(t))(S(t + \tau) + N(t + \tau))dt \\ &= \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{SN}(\tau) + \varphi_{NS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau) . \end{aligned}$$

³Kratka izvira iz angleškega naziva: Average Magnitude Difference Function.

Ker je signal $S(t)$ periodični in zato deterministični signal, signal $N(t)$ pa povsem naključen, odvisnosti med amplitudami signalov $S(t)$ in $N(t)$ ni, kar pomeni, da sta⁴ križni korelaciji za vse τ enaki:

$$\varphi_{SN}(\tau) = \varphi_{NS}(\tau) = 0 .$$

Zaradi tega je

$$\varphi(\tau) = \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau) . \quad (8.11)$$

Upoštevajmo lastnosti avtokorelacij (4.17) in (7.4):

$$\begin{aligned} \varphi_{SS}(\tau + T_0) &= \varphi_{SS}(\tau) , \quad \text{za vsak } \tau , \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_{NN}(\tau) &= 0 . \end{aligned}$$

Zaradi tega lahko za vse τ , ki so večji od neke kritične vrednosti τ_0 , od katere dalje so vrednosti $\varphi_{NN}(\tau)$ zanemarljivo majhne, uporabimo naslednji sklep:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) \approx \varphi_{SS}(\tau) &\Rightarrow S(t) \neq 0 , \\ \varphi(\tau) \approx 0 &\Rightarrow S(t) = 0 . \end{aligned}$$

Torej v primeru, ko je periodična komponenta $S(t)$ v signalu $f(t)$ prisotna, avtokorelacija $\varphi(\tau)$ tega signala od nekega τ_0 dalje kaže periodičen značaj. Sicer amplitude avtokorelacije $\varphi(\tau)$ z večanjem zamika τ izzvenijo.

Zgoraj opisano situacijo ponazarja naslednji primer.

Primer 8.2

Imejmo signal $f(t)$, sestavljen iz periodične komponente $S(t)$, ki je podana z izrazom

$$S(t) = \begin{cases} -E & , \quad -b < t \leq 0 \\ E & , \quad 0 < t \leq b \\ S(t + n2b) = S(t) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} \end{cases}$$

in motilnega naključnega Poissonovega vala $N(t)$. Glej tudi sliko 8.8.

Določimo avtokorelacijo $\varphi(\tau)$ signala $f(t)$.

Rešitev

Naj bo

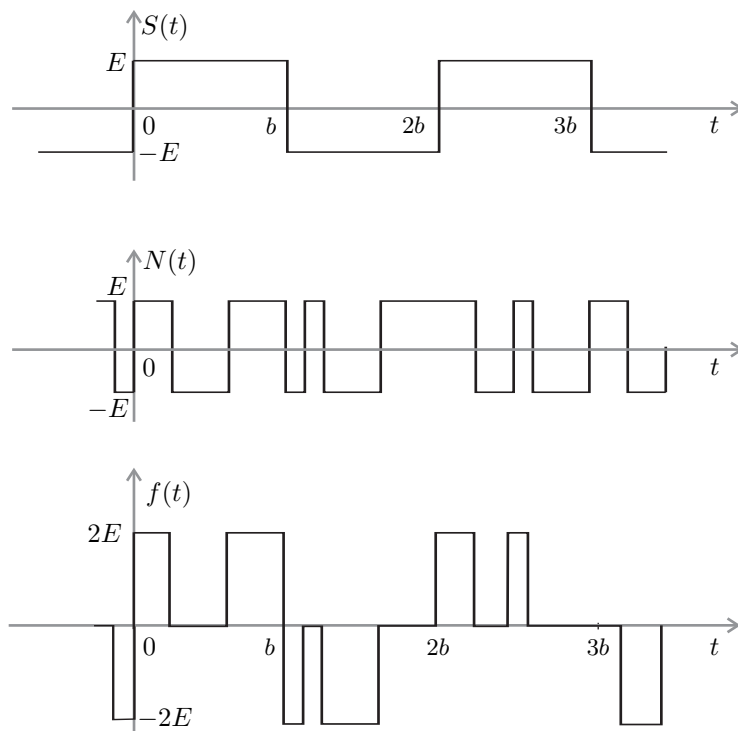
$$f(t) = S(t) + N(t) .$$

Izhajamo iz relacije (8.11)

$$\varphi(\tau) = \varphi_{SS}(\tau) + \varphi_{NN}(\tau)$$

in določimo avtokorelaciji periodične komponente $S(t)$ in naključnega signala $N(t)$.

Avtokorelacijo periodične komponente $S(t)$ izračunamo po (4.13).

Slika 8.8: Potek signalov $S(t)$, $N(t)$ in $f(t)$

Za integracijsko območje izberemo interval $(0, 2b)$ in najprej določimo $\varphi(\tau)$ za $0 \leq \tau \leq b$ (glej sliko 8.9):

$$\varphi_{SS}(\tau) = \frac{E^2}{2b} \left(\int_0^{b-\tau} dt - \int_{b-\tau}^b dt + \int_b^{2b-\tau} dt - \int_{2b-\tau}^{2b} dt \right) = \frac{E^2}{b}(b - 2\tau).$$

Zaradi sodosti avtokorelacijske funkcije (4.15) na $-b \leq \tau \leq b$ velja

$$\varphi_{SS}(\tau) = \frac{E^2}{b}(b - 2|\tau|),$$

kar je območje ene periode. Povsod drugod potek avtokorelacije periodično nadaljujemo:

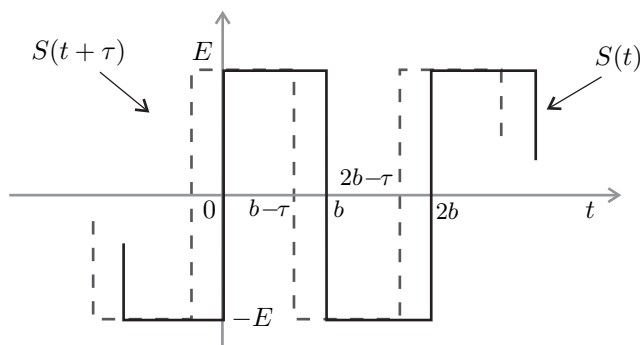
$$\varphi_{SS}(\tau + n2b) = \varphi_{SS}(\tau), \quad \text{za vsak } n.$$

V poglavju 7 smo že določili avtokorelacijo Poissonovega vala z uporabo vzorčnega povprečja (primer 7.2, na strani 179) in dobili

$$\varphi_{NN}(\tau) = E^2 e^{-2\kappa|\tau|},$$

kjer je parameter κ določen kot povprečno število sprememb predznaka signala $N(t)$ na časovno enoto.

⁴Glej razdelek 7.2 na strani 163.



Slika 8.9: Potek signalov $S(t)$ in $S(t + \tau)$ za $0 \leq \tau \leq b$.

Avtokorelacija signala $f(t)$ je zato

$$\varphi(\tau) = E^2 e^{-2\kappa|\tau|} + \begin{cases} \frac{E^2}{b}(b - 2|\tau|) & , \quad -b \leq \tau \leq b \\ \varphi_{SS}(\tau + n2b) = \varphi_{SS}(\tau) , \quad n \in \mathbb{Z} , & \text{drugod} \end{cases} .$$

Poteki avtokorelacij $\varphi_{SS}(\tau)$, $\varphi_{NN}(\tau)$ in $\varphi(\tau)$ so prikazani na sliki 8.10. Na sliki je dobro razviden "periodičen rep", ki kaže na prisotnost periodične komponente. V danem primeru ne bi bilo težko določiti oceno periode signala $S(t)$ z določitvijo lege maksimuma avtokorelacije, če pri tem izvzamemo maksimum, ki nastopi ob času $\tau = 0$.

8.3.2 Postopek s križno korelacijo

Predpostavimo, da je perioda signala $S(t)$ vnaprej znana. V primeru uporabe postopka za odkrivanje odbitih radarskih signalov je ta zahteva izpolnjena, saj gre za periodo, ki je določena s krožno frekvenco lastne antene.

Določimo križno korelacijo med signaloma $f(t)$ in $C(t)$, kjer je signal $C(t)$ nek vnaprej določen močnostni periodični signal z enako periodo, kot jo ima signal $S(t)$:

$$C(t) = C(t + T_0) , \quad \forall t .$$

Križna korelacija $\varphi_{Cf}(\tau)$ teh signalov je podana s

$$\varphi_{Cf}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} C(t) f(t + \tau) dt$$

in je deterministični signal, če signal $f(t)$ izvira iz stacionarnega naključnega procesa.

Uporabimo izraz (8.10) in dobimo

$$\begin{aligned}\varphi_{Cf}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} C(t)(S(t+\tau) + N(t+\tau))dt \\ &= \varphi_{CS}(\tau) + \varphi_{CN}(\tau).\end{aligned}$$

Ker je periodični signal $C(t)$ determinističen, signal $N(t)$ pa povsem naključen, enako kot pri postopku za avtokorelacijo zaključimo, da je

$$\varphi_{CN}(\tau) = 0.$$

Zaradi tega je križna korelacija

$$\varphi_{Cf}(\tau) = \varphi_{CS}(\tau).$$

Križna korelacija dveh periodičnih signalov z enako periodo je zopet periodični signal (4.29)

$$\varphi_{CS}(\tau + T_0) = \varphi_{CS}(\tau), \quad \forall \tau.$$

Zaradi tega lahko glede na potek križne korelacije $\varphi_{Cf}(\tau)$ izpeljemo naslednji sklep:

$$\begin{aligned}\varphi_{Cf}(\tau) \approx \varphi_{Cf}(\tau + T_0) &\Rightarrow S(t) \neq 0, \\ \varphi_{Cf}(\tau) \approx 0 &\Rightarrow S(t) = 0.\end{aligned}$$

V primeru, ko je periodična komponenta $S(t)$ v signalu $f(t)$ prisotna, je križna korelacija $\varphi_{CS}(\tau)$ periodičen signal. Sicer je $\varphi_{CS}(\tau)$ enaka 0 oziroma so njene ocenjene vrednosti zanemarljivo majhne.

Komentar

Izkaže se, da je postopek s križno korelacijo robustnejši od postopka detekcije periodične komponente z uporabo avtokorelacije. To si lahko razložimo z vplivom napak, ki se jim pri določanju ocen korelacij ne moremo izogniti. Pri postopku z avtokorelacijo lahko potek avtokorelacije ocenimo le na končnem integracijskem območju. Zaradi tega

tudi oceni za križni korelaciji $\varphi_{NS}(\tau)$ in $\varphi_{SN}(\tau)$ v splošnem nista enaki 0. Periodičnost v poteku $\varphi(\tau)$ pa še dodatno zakriva aditivni vpliv ocene za avtokorelacijo $\varphi_{NN}(\tau)$ naključnega dela $N(t)$. Pri postopku z uporabo križne korelacije zaradi napake, ki jo naredimo pri ocenjevanju $\varphi_{Cf}(\tau)$, v splošnem ne moremo trditi, da je enaka nič le ocena križne korelacije $\varphi_{CN}(\tau)$. Seveda pa lahko postopek s križno korelacijo uporabimo le, če je perioda signala $S(t)$ vnaprej znana, pri postopku z uporabo avtokorelacije pa te omejitve ni.

Vzemimo, da je

$$C(t) \approx \delta_{T_0}(t).$$

Ker je zaradi (4.39)

$$\varphi_{\delta_{T_0}S}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{T_0}(t)S(t+\tau)dt = \frac{1}{T_0}S(\tau),$$

lahko s tako izbiro signala $C(t)$ pridobimo tudi oceno poteka periodične komponente.

8.3.3 Odkrivanje zvonečih in nezvonečih delov govora ter določanje intonacije

Govorni signal je akustični signal, ki ga ljudje uporabljamo za medsebojno sporazumevanje z naravnim jezikom. Posamezne dele govornega signala s svojimi posebnimi karakteristikami lahko opredelimo kot simbole, ki jih imenujemo *glasovi* oziroma *fonemi* nekega jezika. Z različnimi zaporedji teh simbolov v nekem izbranem jeziku po določenih pravilih kodiramo medsebojna sporočila. Izgovorjave posameznih glasov so med sabo zvočno različne v taki meri, da jih lahko ljudje s sluhom med sabo razlikujejo. Ker je zaradi tega govor sestavljen iz akustično različnih delov, ga lahko opredelimo kot **ne**-stacionaren naključni signal.

Ena izmed osnovnih delitev glasov vsakega jezika je delitev na zvoneče in nezvoneče glasove oziroma dele govora. Zvoneče glasove tvorimo tako, da s primernim stiskom mišic, ki obkrožajo glasilke, dosežemo, da pri prehajanju izdišnega zraka skozi sapnik glasilke zavibrirajo. Frekvenco vibracij lahko s spreminjanjem tlaka izdišnega zraka in pritiskom mišic kontroliramo. Nezvoneče glasove tvorimo tako, da glasilke s stiskom toliko razklenemo, da ne vibrirajo več. Najizrazitejši zvoneči glasovi so samoglasniki⁵, nezvoneči pa na primer nezvoneči priporniki⁶. Zvoneče glasove lahko na dovolj kratkem časovnem intervalu opredelimo kot signale z vsebovano periodično komponento, medtem ko pri nezvonečih glasovih periodične komponente ni. Potek hotenega spreminjanja frekvence nihanja glasilk pri govorjenju imenujemo intonacija ali melodija govora. Intonacija je od jezika odvisna in z njo v govor dodajamo določeno informacijo. Na nivoju izgovora besed z intonacijo naznačimo naglašene zloge, na stavčnem nivoju pa s spremembo intonacije poudarimo (pomembne) besede in izrazimo stavčno obliko⁷.

Pri samodejni obdelavi govora je problem odkrivanja zvonečih delov govora in njegove intonacije pomemben na primer pri razpoznavanju govora, pri študiju fonetičnih in prozodičnih lastnosti jezika, pri sintezi govora in učenju tujih jezikov oziroma učenju pravilne izgovorjave govorno prizadetih oseb.

S tehniškega stališča lahko govorni signal opredelimo z naslednjimi značilnostmi:

- je nestacionaren naključni signal,
- periodična komponenta se v govoru pojavlja le pri zvonečih delih,
- perioda periodične komponente se s časom spreminja,
- frekvenčni obseg govornega signala je med 25 Hz in 10 kHz,
- intonacija se pri običajnem govoru giblje med 25 Hz in 250 Hz.

Pristop k reševanju problema

Za detekcijo zvonečih delov govora in določanje periode s korelacijskimi metodami je potrebno uporabiti avtokorelacijo, ker periode zvonečega dela signala vnaprej

⁵V slovenščini glasovi: *a, é, é, i, ô, ó, u* in polglasnik *ə*.

⁶V slovenščini glasovi: *f, h, s* in *š*.

⁷Osnovne stavčne oblike so: *povedna, vprašalna* in *velelna oblika*.

ne poznamo in se s časom spreminja.

Pri določanju približka avtokorelacije se je potrebno omejiti na dovolj "kratek" časovni interval $(-T_1, T_1)$, na katerem se intonacija še bistveno ne spremeni:

$$\varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)f(t+\tau)dt \approx \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{+T_1} f(t)f(t+\tau)dt .$$

Govorni signal vzorčimo s časovnim razmakom t_0 . Zato tudi ocene vrednosti avtokorelacije določimo le pri diskretnih časovnih trenutkih kt_0 , pri integriranju pa moramo uporabiti numerični postopek:

$$\varphi(kt_0) \approx \frac{1}{2T_1} \int_{-T_1}^{+T_1} f(t)f(t+kt_0)dt \approx \frac{1}{2N} \sum_{i=-N}^{+N} f(it_0)f(it_0+kt_0) .$$

Rezultate določanja avtokorelacije na kratkih izsekih govornega signala si pogledjmo na nekaterih primerih.

Primerjava zvoneč : nezvoneč del govora

Na sliki 8.11 sta prikazana 25 ms dolga izseka glasov *a* in *š* ter njuni normirani avtokorelaciji. Avtokorelacijo smo normirali⁸, tako da smo njeno vrednost ob $\tau = 0$ postavili na 1. Poteka obeh avtokorelacij se močno razlikujeta. Periodičen "rep" je močno izražen pri avtokorelaciji glasu *a*, medtem ko pri avtokorelaciji glasu *š* v osnovni postopek za odkrivanje in določanje periode poteka tako, da določimo njene amplitude hitro padajo brez kakršnegakoli znaka periodičnosti. Iščemo torej τ_0 maksimuma avtokorelacijske funkcije za pozitivne τ .

$$\varphi(\tau_0) \geq \varphi(\tau) , \quad \tau > 0 .$$

Ali je pridobljena vrednost τ_0 lahko ocena periode periodične komponente v signalu, odločimo iz primerjave velikosti maksimuma $\varphi(\tau_0)$ z vrednostjo avtokorelacije $\varphi(0)$ in velikosti ocene za periodo.

Če je

$$\begin{aligned} \varphi(0) - \varphi(\tau_0) &> A \quad \text{in/ali} \\ \tau_0 &< B , \end{aligned}$$

kjer sta vrednosti za A in B določeni na podlagi lastnosti govornega signala⁹, vrednosti τ_0 ne sprejmemo za oceno periode govornega signala in odločimo, da je obravnavani izsek govora nezvoneč.

Vpliv širine izreza ($2T_1$) signala na obliko avtokorelacije

Ocena avtokorelacije stacionarnega naključnega signala je tem boljša, čim daljša je časovna širina ($2T_1$) okna. Ker lahko govorni signal razumemo le kot odsekoma

⁸Tak postopek normalizacije lahko razumemo tudi kot normiranje energije izseka signala.

⁹Vrednosti pragov A in B lahko prilagodimo določenemu govorcu ali pa načinu govora.

stacionaren govorni signal, pa moramo širino okna nujno omejiti. Pri spontanem govoru intonacijo stalno spreminjamo, kar pomeni, da tudi pri daljših zvonečih govornih segmentih pogoj periodičnosti ne bo več izpolnjen.

Na sliki 8.12 je prikazana ocena avtokorelacije govornega signala glasu *a* za tri različne širine okenske funkcije. Pri širini okna 10 ms pri postopku določanja periode, kot je opisan v prejšnjem razdelku, pride do napake, ker se odločimo za enkrat predolgo periodo¹⁰. Pri širini okenske funkcije 30 ms zvoneč govorni izsek zaradi večje širine okna ni več povsem periodičen in zato "periodični rep" ni več tako izrazit.

Vpliv oblike signala na avtokorelacijo

Naloga odkrivanja zvonečih delov govora in določanje intonacije je seveda odvisna od izrazitosti periodične komponente in oblike signala. Slika 8.13 prikazuje tri 25 ms dolge izseke govornih signalov za zvoneče glasove *a*, *ó* in *ž* in njihove avtokorelacije. Pri glasovih *a* in *ó* je zvonečnost sicer razvidna direktno iz poteka signalov, vendar pa bi se pri samodejnem določanju ocene periode pri glasu *ó* zaradi oblike signala, ki ima znotraj intervala ene periode dva izrazita in po amplitudi podobna maksimuma, težko odločili, katero vrednost bi izbrali. Pri avtokorelaciji izseka signala glasu *ó* je maksimum pri času τ , ki ustreza oceni periode signala, v primerjavi z ostalimi lokalnimi maksimumi dosti bolj izrazit. Glas *ž*, v jezikoslovju opredeljen kot *zvoneč pripornik*, je nekje na robu zvonečnosti in ga tudi ljudje tako pri izgovoru kot tudi pri razpoznavanju večkrat zamenjujemo z njegovim nezvonečim parom *š*. To je primer, kjer učinkovitost postopka ugotavljanja zvonečega dela govora z uporabo avtokorelacije odpove. Oceno periode, označene na sliki 8.13, bi zaradi neizrazitosti maksimuma prav lahko zgrešili. Zaradi njegove relativno majhne amplitude v primerjavi z vrednostjo $\varphi(0)$ pa bi lahko sprejeli tudi odločitev, da je analiziran odsek govora nezvoneč.

Središčno izrezovanje signala¹¹

Izkaže se [3], da učinkovitost odkrivanja zvonečih delov govora in določanja intonacije pomembno izboljšamo z uporabo posebnega načina filtriranja signala, ki ga imenujemo *središčno izrezovanje* (CC). Enostavni postopek izvedemo tako, da vse vrednosti signala, ki so po absolutni vrednosti manjše od predpisane vrednosti *C*, postavimo na 0, sicer pa jih po amplitudi absolutno zmanjšamo za *C*. Iz $f(t)$ dobimo signal

$$f_{CC}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad |f(t)| < C \\ \frac{f(t)}{|f(t)|}(|f(t)| - C) & , \quad \text{drugod} \end{cases}$$

¹⁰Napake, kjer je ocena periode enkrat prevelika ali premajhna, kot da bi z glasom preskočili eno oktavo navzgor ali navzdol, so najbolj pogoste.

¹¹Angleško "center clipping".

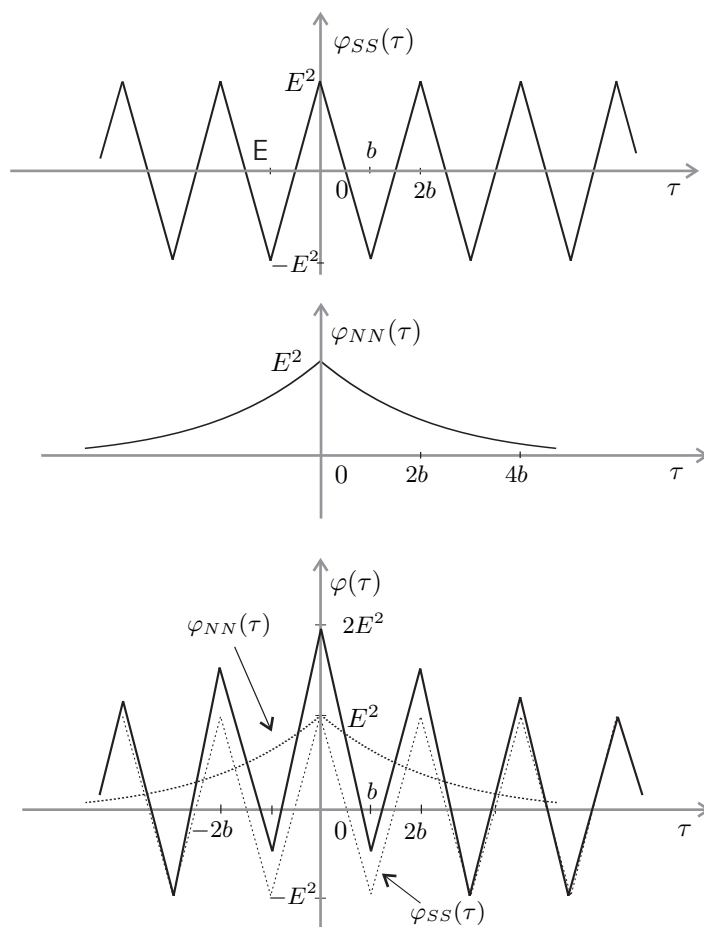
za katerega določimo avtokorelacijo. Primer uporabe središčnega izrezovanja je prikazan na sliki 8.14. Pri primerjavi avtokorelacije izvornega signala z avtokorelacijo središčno izrezanega signala opazimo, da so vrednosti lokalnih maksimumov znotraj območja ene periode bistveno manjše za središčno izrezan signal. To posledično pomeni, da se zmanjša možnost napačne odločitve pri izbiri ocene periode.

Zgradba sistema za določanje intonacije govora z avtokorelacijo

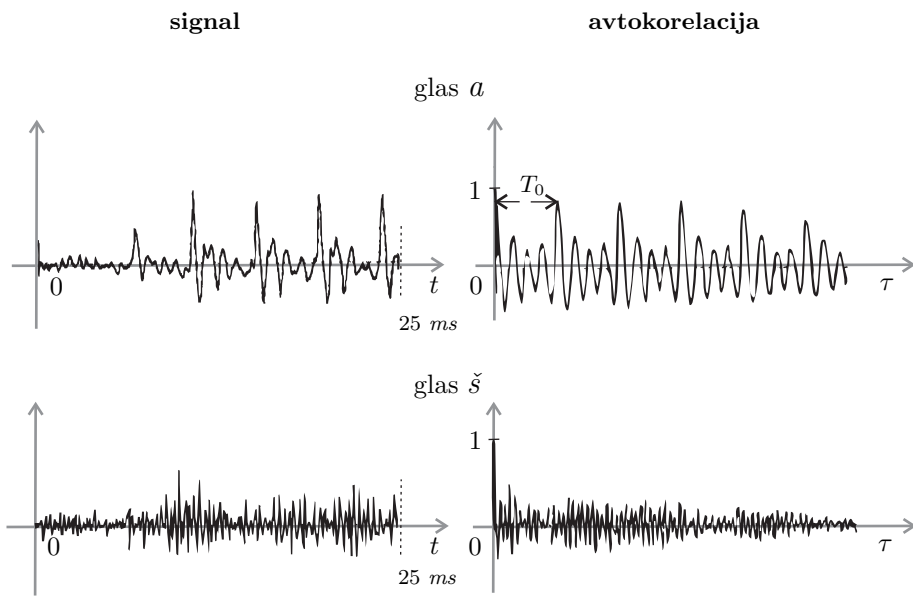
Vključitev postopka središčnega izrezovanja v sistem za določanje intonacije govora zanesljivosti delovanja navadno še ne izboljša dovolj. Zaradi tega je tak sistem koristno dopolniti še z delom, kjer izvorni signal najprej spustimo skozi nizkopasovni filter in s tem iz signala izločimo visokofrekvenčni del, ki ne nosi informacije o periodični naravi signala. Temu sledi središčno izrezovanje, določanje avtokorelacije in ocena zvanečnosti ter intonacije. Pridobljene rezultate je smiselno še naknadno obdelati. Ker lahko predpostavimo, da je spreminjanje intonacije pri običajnem načinu govora zvezen proces, ki ne vključuje hipnih sprememb, ocenjeni potek intonacije zgladimo z *medianinim* ali podobnim filtrom [4]. Po dogovoru vrednosti za intonacijo pri nezvenečih delih govora postavimo na 0. Tako je sistem za določanje intonacije govora navadno sestavljen iz naslednjih delov:

- nizko pasovno filtriranje,
- določanje avtokorelacije z uporabo središčnega izrezovanja signala in ocena zvanečnosti ter intonacije,
- naknadna obdelava rezultatov.

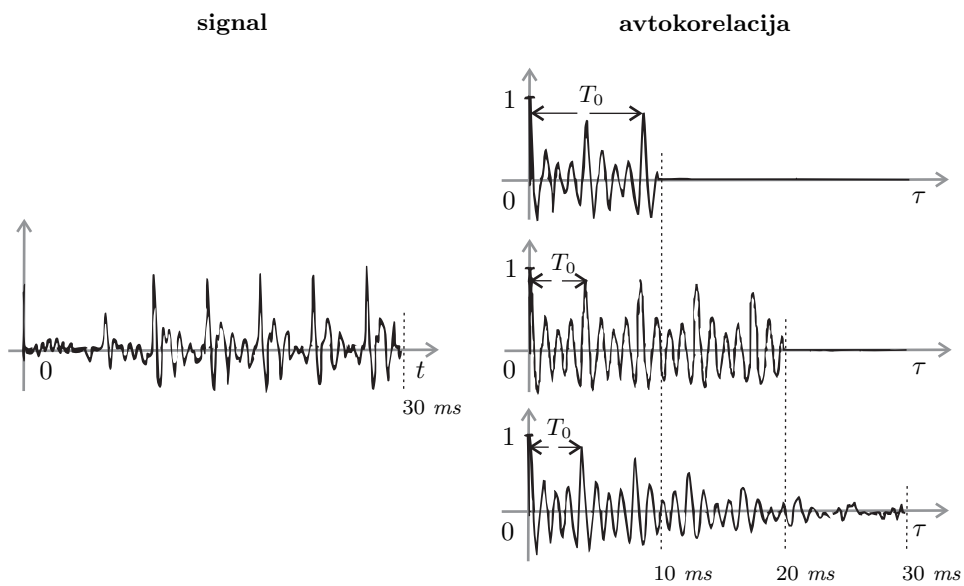
Vpliv središčnega izrezovanja signala in postprocesiranja na pravilnost detekcije periode je razviden iz slike 8.15, kjer so prikazani rezultati obdelave z osnovno avtokorelacijsko metodo, s predhodnim središčnim izrezovanjem in nazadnje še z naknadno obdelavo rezultatov s postopkom glajenja z *medianinim* filtrom. Rezultati so povzeti po delu [3].



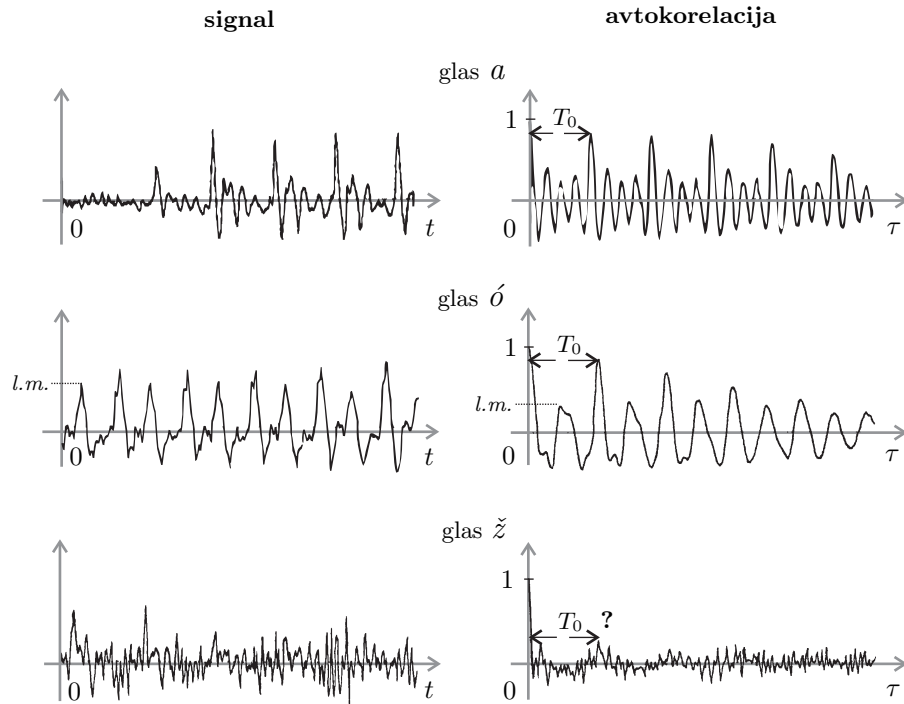
Slika 8.10: Avtokorelacija periodične komponente $\varphi_{SS}(\tau)$, Poissonovega vala $\varphi_{NN}(\tau)$ in vsote obeh komponent $\varphi(\tau)$



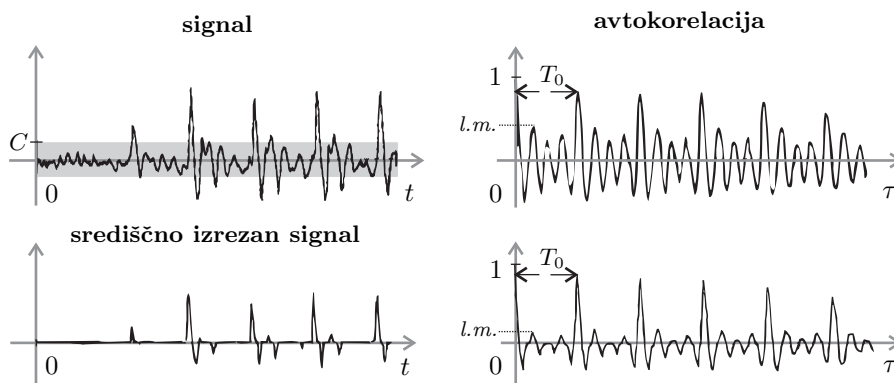
Slika 8.11: 25 ms izseka govornega signala glas *a* in glas *š* ter njuni normirani avtokorelaciji



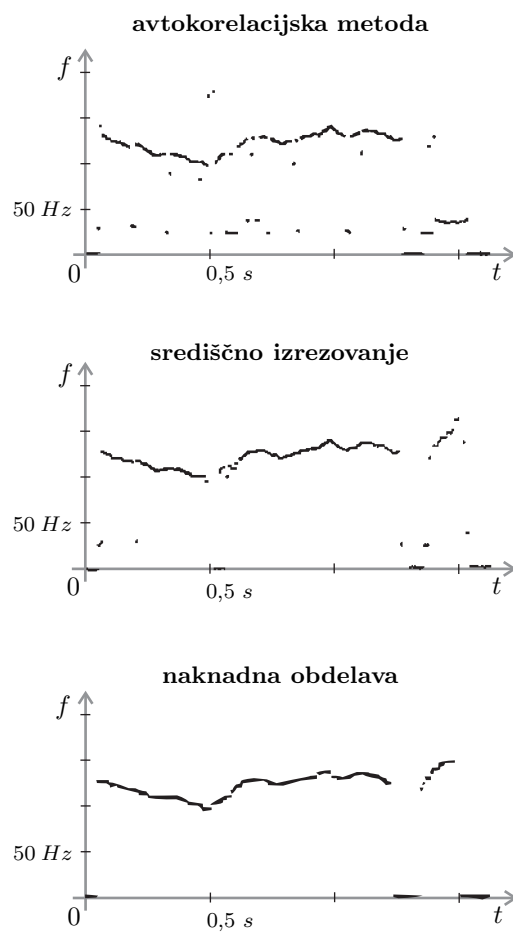
Slika 8.12: Govorni signal glas *a* in njegove avtokorelacije pri treh različnih širinah okenske funkcije



Slika 8.13: Govorni signali za glasove *a*, *ó* in *ž* ter njihove avtokorelacije. Višina *l.m.* označuje amplitudo lokalnega maksimuma znotraj območja ene periode glasu *ó* in njegove avtokorelacije.



Slika 8.14: Govorni signal glasu *a* in njegov središčno izrezan signal ter njuni avtokorelaciji. Širina izreza znaša $2C$. Višina *l.m.* označuje amplitudo lokalnega maksimuma znotraj območja ene periode.



Slika 8.15: Rezultati samodejnega postopka določanja intonacije v govornem signalu stavka "We were away a year ago."

Literatura

- [1] F. Fallside: 3.4 Homomorphic Filtering and Complex Cepstrum, *Computer Speech Processing*, izdala F. Fallside in W. A. Woods, Prentice/Hall International, 1985, str. 71–79.
- [2] M. J. Ross in drugi: Average Magnitude Difference Function Pitch Extractor, *Transactions on Acoustics, Signals and Speech Processing*, Vol. 22, oktober 1974, str. 634–468.
- [3] L. R. Rabiner, R. W. Schafer: Pitch Period Estimation Using the Autocorrelation Function, *Digital Processing of Speech Signals*, Prantice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978, str. 150–157.
- [4] L. R. Rabiner, R. W. Schafer: Median Smoothing and Speech Processing, *Digital Processing of Speech Signals*, Prantice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1978, str. 158–160.

9. Digitalni signali

Pojem digitalnega signala smo definirali že v uvodnem poglavju v razdelku 1.3.4 na strani 15. Še enkrat pripomnimo, da smo v prehod na obravnavo digitalnih signalov prisiljeni, če nameravamo postopke zajemanja in obdelave signalov udejaniti na digitalnih računalnikih. Diskretizacijo po času (vzorčenje) in diskretizacijo po amplitudi (kvantizacijo) narekuje fizična omejitev digitalnega pomnilnika na končno število pomnilniških celic, kar pomeni, da je zapis signala omogočen le s končnim številom različnih amplitud z omejeno natančnostjo.

Pri pridobivanju digitalnih signalov si lahko postopka vzorčenja in kvantizacije sledita v poljubnem vrstnem redu:

$$\text{digitalizacija:} \quad \begin{array}{l} \text{vzorčenje} \longrightarrow \text{kvantizacija} \\ \text{kvantizacija} \longrightarrow \text{vzorčenje} \end{array} .$$

To pomeni, da lahko vsakega izmed obeh potrebnih postopkov diskretizacije ločeno obravnavamo, ne da bi s tem vplivali na končni rezultat – *digitalni signal*.

9.1 Vzorčenje

Pri digitalni obdelavi signalov za določanje karakteristik signala uporabljamo le nekatere (vzorčne) vrednosti amplitud signala.

Postopek izbire vrednosti signala imenujemo vzorčenje (slika 9.1). Predstavimo ga lahko s preslikavo

$$S : x(t) \rightarrow \{\dots, x(t_1), x(t_2), x(t_3), \dots\} .$$

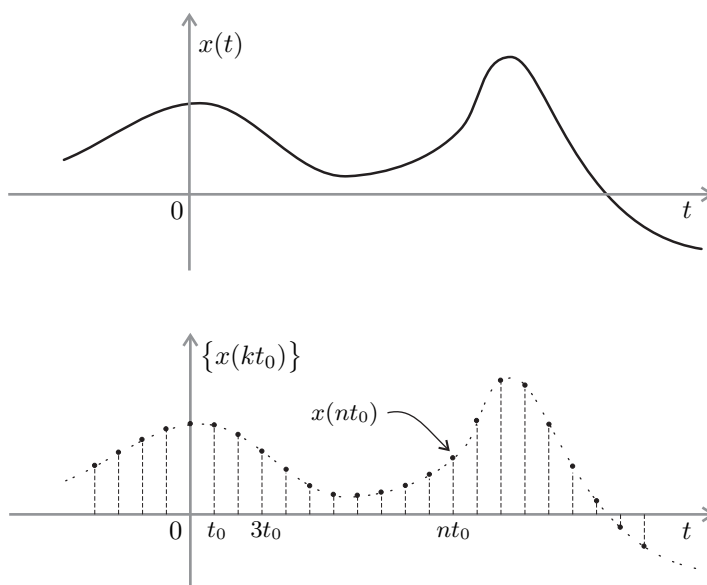
- Vzorčenje s stalnim časovnim razmakom je preslikava

$$S : x(t) \rightarrow \{\dots, x(-2t_0), x(-t_0), x(0), x(t_0), \dots\}$$

ali

$$S : x(t) \rightarrow \{x(nt_0)\}, n \in \mathbb{Z} .$$

Razmak t_0 imenujemo *interval vzorčenja*.



Slika 9.1: Signal $x(t)$ in pripadajoč vzorčen signal $\{x(kt_0)\}$

9.1.1 Izrek o vzorčenju

Naj bo $x(t)$ zvezen frekvenčno omejen signal s frekvenčnim obsegom $(0, F)$. Signal je popolnoma določen, če poznamo njegove vrednosti, ki si sledijo v stalnih časovnih razmikih širine t_0 , kjer je

$$t_0 = \frac{1}{2F}. \quad (9.1)$$

$x(t)$ je določen z enačbo

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_0) \frac{\sin 2\pi F(t - nt_0)}{2\pi F(t - nt_0)}. \quad (9.2)$$

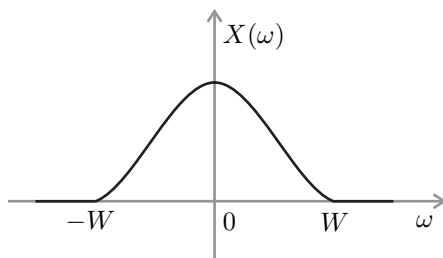
Izpeljimo relacijo (9.2).

Dokaz:

Naj bo $X(\omega)$ (slika¹ 9.2) spekter signala $x(t)$, ki je frekvenčno omejen s krožno frekvenco $W = 2\pi F$:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \\ X(\omega) &= 0, \quad |\omega| > W. \end{aligned}$$

¹Zaradi enostavnosti grafičnega prikaza smo vzeli, kot da sta spektra $X(\omega)$ na sliki 9.2 in $X_p(\omega)$ na sliki 9.3 realna.



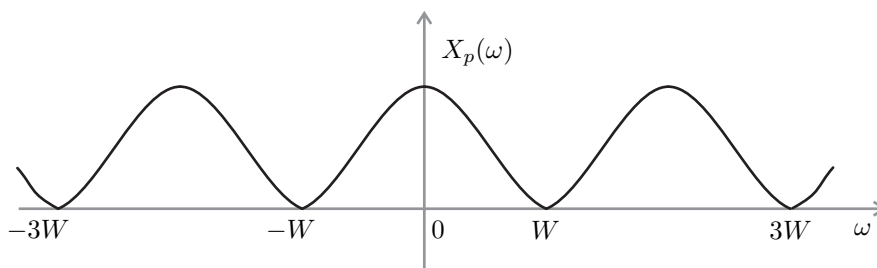
Slika 9.2: Spekter $X(\omega)$ signala $x(t)$. $W = 2\pi F$ je mejna krožna frekvenca signala.

Naj bo $X_p(\omega)$ (slika 9.3) periodičen signal s periodo $2W$:

$$X_p(\omega + n2W) = X_p(\omega) ,$$

za katero velja

$$X_p(\omega) = X(\omega) , \quad -W < \omega < W .$$



Slika 9.3: Periodični spekter $X_p(\omega)$. $2W$ je perioda spektra $X_p(\omega)$.

Predpostavimo, da je $X_p(\omega)$ taka periodična funkcija, da jo lahko razvijemo v Fourierovo vrsto:

$$X_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n)e^{jn\Omega_0\omega} .$$

Po enačbi (3.1) za določitev osnovne harmonske frekvence je

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{2W} = \frac{2\pi}{4\pi F} = \frac{1}{2F} = t_0$$

in zato

$$X_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n)e^{jnt_0\omega} .$$

Po (3.3) določimo še vrednosti kompleksnega spektra $C(n)$:

$$C(n) = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W X_p(\omega) e^{-jnt_0\omega} d\omega .$$

Pri tem upoštevajmo, da je

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{jt\omega} d\omega ,$$

$$X(\omega) = \begin{cases} X_p(\omega) , & -W < \omega < W \\ 0 , & \text{drugod} \end{cases}$$

in zato

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X_p(\omega) e^{jt\omega} d\omega .$$

Poravnava zgornjih izrazov dá

$$C(n) = \frac{\pi}{W} x(-nt_0) .$$

Tako določimo zapis Fourierove vrste za $X_p(\omega)$:

$$X_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{W} x(-nt_0) e^{jnt_0\omega} . \quad (9.3)$$

Zapišimo $x(t)$ kot inverzno Fourierovo transformacijo spektra $X(\omega)$. Pri tem upoštevajmo, da se spektra $X(\omega)$ in $X_p(\omega)$ ujemata na intervalu ene periode $-W < \omega < W$ in da $X_p(\omega)$ lahko zapišemo s Fourierovo vrsto (9.3):

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{F}^{-1}(X(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{jt\omega} \cdot \frac{\pi}{W} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-nt_0) e^{jnt_0\omega} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-nt_0) \int_{-W}^W \frac{e^{j(t+nt_0)\omega}}{2W} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-nt_0) \frac{\sin W(t+nt_0)}{W(t+nt_0)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_0) \frac{\sin W(t-nt_0)}{W(t-nt_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_0) \frac{\sin 2\pi F(t-nt_0)}{2\pi F(t-nt_0)} . \end{aligned}$$

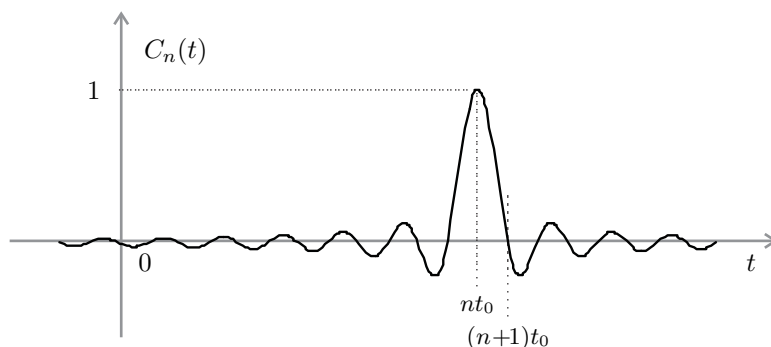
S tem smo potrdili veljavnost izraza (9.2)!

Rekonstrukcija signala $x(t)$ z izrazom (9.2)

Iz izraza (9.2) sledi, da lahko signal $x(t)$ predstavimo kot vsoto produktov vzorčenih vrednosti signala $x(nt_0)$ in funkcij

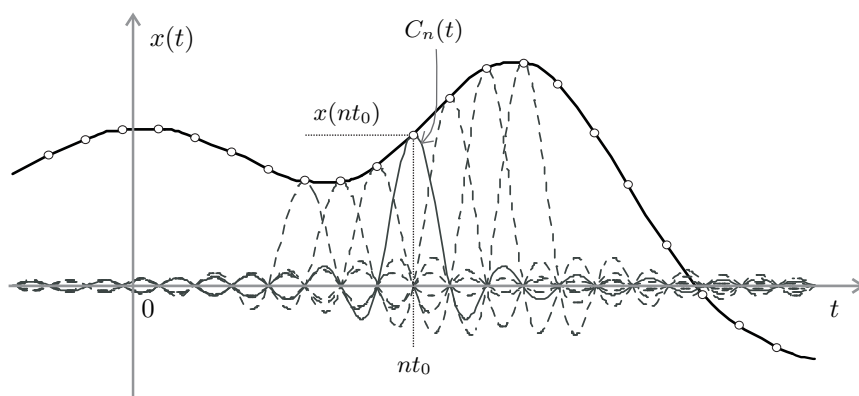
$$C_n(t) = \frac{\sin W(t-nt_0)}{W(t-nt_0)} .$$

Funkcije $C_n(t)$ imenujemo tudi *kardinalne temeljne funkcije* (slika 9.4). S parametri W in nt_0 so določene tako, da imajo pri času $t = nt_0$ vrednost 1, pri vseh drugih celih mnogokratnikih t_0 pa vrednost 0.



Slika 9.4: Kardinalna temeljna funkcija $C_n(t)$

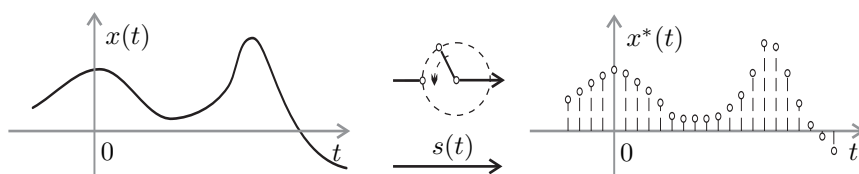
Iz lastnosti $C_n(t)$ sledi veljavnost zveze (9.2) za $t = kt_0$ za vsak cel k . Za vse druge časovne trenutke t z izrazom (9.2) vrednost amplitude $x(t)$ določimo tako, da seštejemo prispevke vseh produktov $x(kt_0)C_k(t)$ (slika 9.5). Ker vrednosti kardinalne funkcije asimptotično padajo proti nič, ko se oddaljujemo od trenutka nt_0 , na vrednost vsote (9.2) ob času t najbolj vplivajo tisti vzorci $x(kt_0)$, za katere je razlika $|t - kt_0|$ majhna.



Slika 9.5: Rekonstrukcija signala $x(t)$ z izrazom (9.2)

9.1.2 Vzorčenje in rekonstrukcija signala

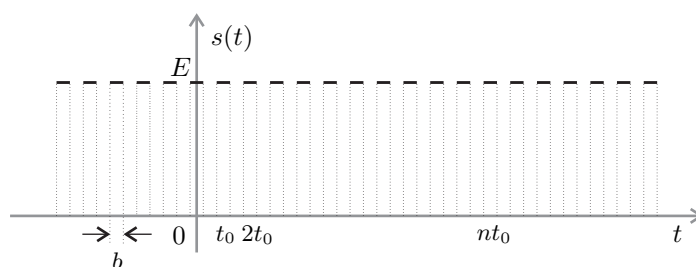
Vzorčenje signala $x(t)$ lahko predstavimo kot periodično časovno filtriranje signala z vzorčevalno funkcijo $s(t)$ (slika 9.6).



Slika 9.6: Postopek vzorčenja, predstavljen s časovnim filtriranjem.

Rezultat filtriranja je vzorčen signal $x^*(t)$:

$$x^*(t) = x(t) \cdot s(t) .$$



Slika 9.7: Vzorčevalna funkcija $s(t)$.

Vzorčevalna funkcija $s(t)$ (slika 9.7) je v praksi periodični signal ozkih pravokotnih impulzov, ki si sledijo s periodo t_0 . Pri tem velja:

$$\begin{aligned} E \cdot b &= 1 , \\ s(t + nt_0) &= s(t) . \end{aligned}$$

Razmerje

$$a_0 = \frac{b}{t_0}$$

imenujemo *faktor režima vzorčenja*. Njegove vrednosti so običajno na intervalu

$$10^{-4} < a_0 < 10^{-3} .$$

V idealnem primeru, ko limitiramo širino impulzov b proti nič, je

$$\lim_{b \rightarrow 0} s(t) = \delta_{t_0}(t) .$$

Naj bo signal $x(t)$ frekvenčno omejen s frekvenco F . Izvedimo njegovo periodično časovno filtriranje (slika 9.8) in določimo spekter $X^*(\omega)$ vzorčenega signala $x^*(t)$.

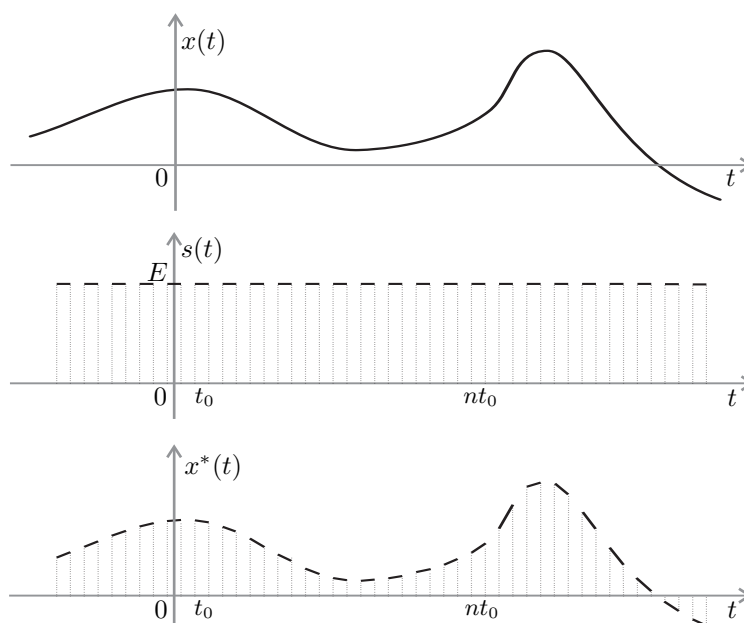
Za to zapišimo periodični signal $s(t)$ s Fourierovo vrsto in upoštevajmo, da je $x^*(t) = s(t) \cdot x(t)$:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) e^{j \frac{2\pi}{t_0} kt},$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) x(t) e^{j \frac{2\pi}{t_0} kt}.$$

Pri tem $x(t)$ izrazimo z njegovo inverzno Fourierovo transformacijo:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) e^{j \frac{2\pi}{t_0} kt} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\sigma) e^{j\sigma t} d\sigma.$$



Slika 9.8: Poteki signalov $x(t)$, $s(t)$ in $x^*(t)$

Spekter $X^*(\omega)$ je tedaj

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \mathcal{F}(x^*(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\sigma) e^{j(\sigma + \frac{2\pi}{t_0} k)t} d\sigma \right\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\sigma) e^{j(\sigma + \frac{2\pi}{t_0} k)t} d\sigma \right\} e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Pri integriranju notranjega integrala uvedimo novo spremenljivko:

$$u = \sigma + \frac{2\pi}{t_0} k \quad \Rightarrow \quad \sigma = u - \frac{2\pi}{t_0} k \quad \text{in} \quad du = d\sigma$$

in upoštevajmo, da sta Fourierova in inverzna Fourierova transformacija inverzni transformaciji:

$$X^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k)X\left(\omega - \frac{2\pi k}{t_0}\right). \quad (9.4)$$

Naj bo

$$t_0 = \frac{1}{2F}.$$

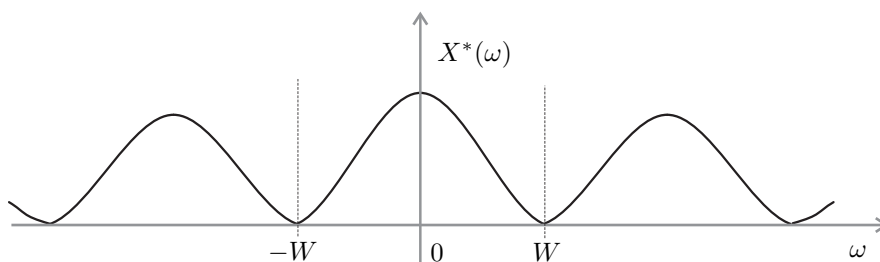
Ker je $W = 2\pi F$, je $W = \frac{\pi}{t_0}$ in iz izraza (9.4) dobimo

$$X^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k)X(\omega - 2Wk).$$

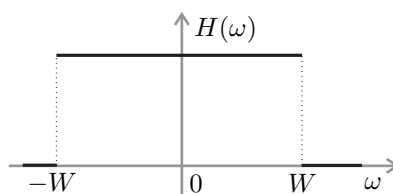
V tem primeru (slika 9.9) na intervalu $-W < \omega < +W$ velja

$$X^*(\omega) = C(0) \cdot X(\omega), \quad C(0) \in \mathbb{R}^+.$$

Rekonstrukcijo signala $x(t)$ iz signala $x^*(t)$ lahko tedaj izvedemo z idealnim nizkim



Slika 9.9: Spekter $X^*(\omega)$ vzorčenega signala $x^*(t)$ v primeru, ko je $t_0 = \frac{1}{2F}$.



Slika 9.10: Prevaljalna funkcija $H(\omega)$ idealnega nizkega filtra z mejno frekvenco W filtrom (slika 9.10) z mejno frekvenco W :

$$H(\omega) : x^*(t) \longrightarrow x(t).$$

■ Frekvenco

$$2F = \frac{1}{t_0}$$

imenujemo “Shannonova” ali tudi “Gabor-ova” frekvenca vzorčenja.

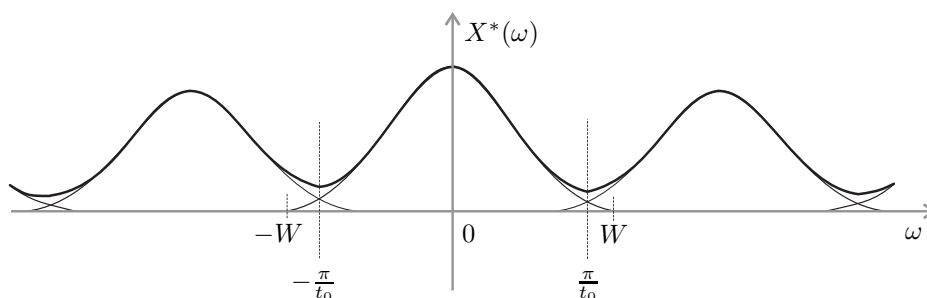
Naj bo

$$t_0 > \frac{1}{2F}.$$

Tedaj je

$$\frac{\pi}{t_0} < W.$$

Iz slike 9.11 oziroma iz izraza (9.4) zdaj uvidimo, da se spektra $C(0)X(\omega)$ in $X^*(\omega)$ na frekvenčnem območju $-W < \omega < W$ ne ujemata več. Zato v tem primeru rekonstrukcija signala $x(t)$ iz njegovih vzorcev $x^*(t)$ ni možna!



Slika 9.11: Spekter $X^*(\omega)$ vzorčenega signala $x^*(t)$ v primeru, ko je $t_0 > \frac{1}{2F}$.

Naj bo

$$t_0 < \frac{1}{2F}.$$

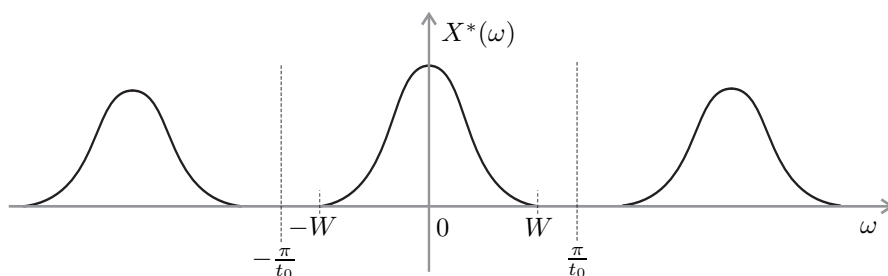
Tedaj je

$$\frac{\pi}{t_0} > W.$$

Ker je osnovni zamik $\frac{\pi}{t_0}$ v izrazu (9.4) večji od mejne krožne frekvence W , za frekvenčno območje $-W < \omega < W$ zopet velja $C(0)X(\omega) = X^*(\omega)$ (slika 9.12). Z uporabo idealnega nizkega filtra je v tem primeru rekonstrukcija tudi mogoča.

Komentar

Če vzorčimo bolj na gosto, kot to predvideva izrek o vzorčenju (9.1), je rekonstrukcija še vedno možna. Zavedati pa se moramo, da na ta način povečamo število vzorcev in s tem vplivamo na daljši čas obdelave signalov in povečamo zahteve po razpoložljivem pomnilniku.



Slika 9.12: Spekter $X^*(\omega)$ vzorčenega signala $x^*(t)$ v primeru, ko je $t_0 < \frac{1}{2F}$.

9.1.3 Časovna širina : frekvenčna širina

Izraz (9.2) pravi, kako iz vzorčenih vrednosti signala $\{x(nt_0)\}$ brez napake rekonstruirati katerokoli vrednost signala $x(t)$. Praktično uporabo te zveze omejuje le vrsta na desni strani enačbe, ki zahteva izračun števno neskončno seštevanj. Izraz (9.2) bi prešel v izraz s končnim številom aritmetičnih operacij samo v primeru, ko bi bil signal, ki ga vzorčimo, tudi časovno omejen:

$$x(t) = 0 \text{ za } |t| > Nt_0 \implies x(t) = \sum_{n=-N}^N x(nt_0) \frac{\sin 2\pi F(t - nt_0)}{2\pi F(t - nt_0)}.$$

Vprašajmo se, ali obstaja signal $x(t)$, ki je hkrati frekvenčno in časovno omejen?

$$x(t) = 0, \quad |t| > T \text{ in } T < \infty, \quad (9.5)$$

$$X(\omega) = 0, \quad |\omega| > W \text{ in } W < \infty. \quad (9.6)$$

Ugotovimo, ali so ti pogoji kdaj izpolnjeni!

Predpostavimo, da je signal $x(t)$ soda funkcija²:

$$x(t) = x(-t), \quad \text{za vsak } t.$$

Naj signal izpolnjuje zahtevi (9.5) in (9.6). Njegov spekter lahko tedaj izrazimo kot

$$X(\omega) = \int_{-T}^T x(t) \cos \omega t dt.$$

Ker je zaradi (9.6)

$$\omega > W \implies X(\omega) = 0,$$

²Vsak signal lahko zapišemo kot vsoto sodega in lihega signala [1]. Če pokažemo, da zgornje predpostavke ne izpolnjujejo vsi sodi in lihi signali, od tod sledi, da niso izpolnjene za noben signal.

je za vse $\omega > W$ tudi

$$\frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} = 0 .$$

n -ti odvod spektra $X(\omega)$ po frekvenci ω lahko zapišemo kot

$$\frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \int_{-T}^T t^n x(t) \cos \omega t dt , & n = 2k \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} \int_{-T}^T t^{(n-1)} x(t) t \sin \omega t dt , & n = 2k + 1 . \end{cases}$$

Ker je pri lihih n -jih ($n = 2k + 1$) spodnji integrand liha funkcija, ugotovimo, da je

$$\int_{-T}^T t^n x(t) \cos \omega t dt = 0 , \quad \text{za vse } n . \quad (9.7)$$

Iz zveze (9.7) direktno sledi:

- Funkcija $x(t) \cos \omega t$ je ortogonalna na vse funkcije t^n in zato ortogonalna na vsak polinom iz množice ortogonalnih polinomov. Zato je

$$x(t) \cos \omega t = 0 \quad \text{za } |t| < T .$$

- Ker je funkcija $\cos \omega t$ skoraj povsod različna od 0, to pomeni, da je

$$x(t) = 0 \quad \text{za } |t| < T .$$

Do enakega sklepa bi na podoben način prišli tudi za vse lihe signale.

Od nič različen signal, ki bi bil hkrati časovno in frekvenčno omejen, ne obstaja!

Pri komentarju zveze (9.2) glede rekonstrukcije signala na strani 215 smo omenili, da imajo pri rekonstrukciji vrednosti amplitude signala $x(t_r)$ največji vpliv tisti vzorci signala, ki so od trenutka rekonstrukcije t_r časovno najmanj oddaljeni in da z večanjem časovne oddaljenosti od časa t_r vpliv vzorčenih vrednosti signala na rekonstrukcijo pada proti 0. Z uporabo izraza (9.2) se zato rekonstrukciji prave vrednosti signala $x(t_r)$ lahko poljubno natančno približamo, tako da seštejemo dovolj veliko število členov vrste z vzorci $x(nt_0)$ iz okolice t_r .

9.2 Kvantizacija

Skladno z dogovorom v uvodnem poglavju na strani 15, postopek diskretizacije vrednosti amplitud signala imenujemo *kvantizacija*.

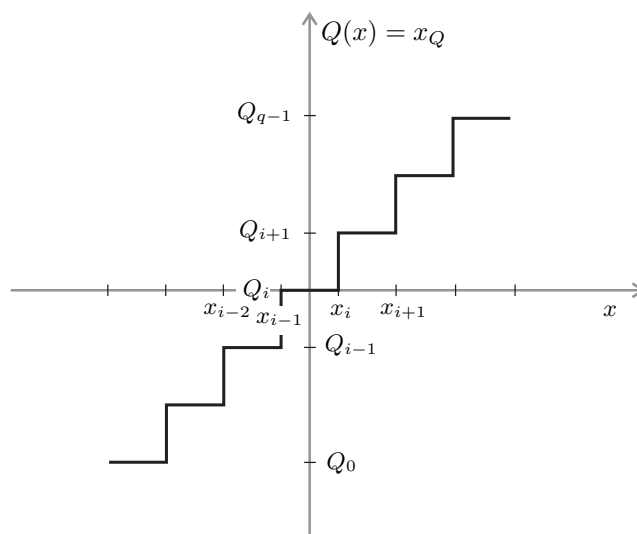
Kvantizacijo definiramo kot preslikavo

$$\begin{aligned} Q : x(t) &\longrightarrow x_Q(t) , \\ x_Q(t) &= Q(x(t)) , \end{aligned}$$

ki posameznim podintervalom $[x_{i-1}, x_i)$ vrednosti amplitud signala

$$x_{i-1} \leq x(t) < x_i$$

predpiše natanko določeno vrednost Q_i (slika 9.13).



Slika 9.13: Linearna kvantizacijska preslikava $Q(x)$

Razliko

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

imenujemo kvantizacijski razmik in ni nujno enaka razliki

$$\Delta Q_i = Q_i - Q_{i-1} .$$

Običajno sicer izberemo

$$\Delta Q_i = \Delta x_i .$$

S q označimo število kvantizacijskih nivojev. Zaradi praktičnih razlogov implementacije kvantizacije na digitalnih sistemih običajno velja

$$q = 2^n ,$$

kjer n imenujemo število bitov kvantizatorja. Govorimo o n -bitnem kvantizatorju.

- Kvantizacija je linearna³, če je $\Delta x_i = \Delta x = \Delta Q$.

Vse nadaljnje izpeljave vežimo na predpostavko, da imamo opravka z linearno kvantizacijo.

³Nasprotno kot pri vzorčenju signalov se v praksi velikokrat uporablja tudi nelinearna kvantizacija. Glej primer 9.1 na strani 226.

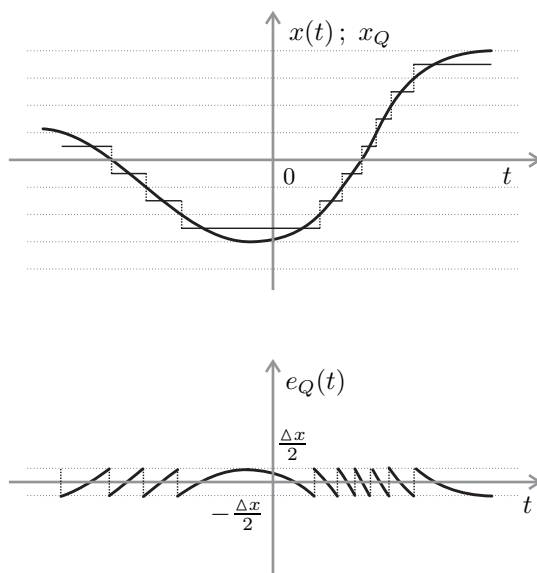
9.2.1 Signal kvantizacijske napake $e_Q(t)$

- Signal kvantizacijske napake $e_Q(t)$ določimo kot

$$e_Q(t) = x_Q(t) - x(t) . \quad (9.8)$$

Od tod lahko zapišemo

$$x_Q(t) = x(t) + e_Q(t) . \quad (9.9)$$



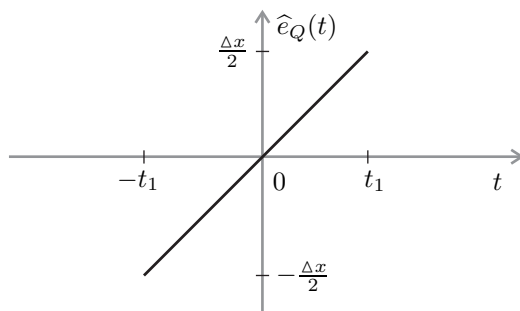
Slika 9.14: Signala $x(t)$ in $x_Q(t)$ ter signal kvantizacijske napake $e_Q(t)$

Pri linearni kvantizaciji⁴ (slika 9.14) je signal $e_Q(t)$ amplitudno omejen:

$$|e_Q(t)| < \frac{\Delta x}{2} .$$

Določitev srednje moči signala $e_Q(t)$

Iz poteka signala kvantizacijske napake $e_Q(t)$ na sliki 9.14 opazimo, da je potek tega signala v velikem delu odseka monotono padajoča ali naraščajoča funkcija med ekstremnima vrednostima $-\frac{\Delta x}{2}$ in $\frac{\Delta x}{2}$. Z večanjem števila kvantizacijskih nivojev q taka situacija postaja vedno pogostejša. Izkaže se, da za dovolj velike vrednosti q monotoni potek med ekstremoma lahko dobro aproksimiramo že z



Slika 9.15: Linearni približek $\hat{e}_Q(t)$ signala kvantizacijske napake $e_Q(t)$ na intervalu $(-t_1, t_1)$

linearno funkcijo (slika 9.15). Iz linearnega približka ocenimo povprečno moč $e_Q(t)$ na segmentu, kjer vrednost napake monotonno narašča. Upoštevajmo

$$e_Q(t) \approx kt, \quad |t| < t_1, \quad \frac{\Delta x}{2} = kt_1$$

in dobimo

$$P_Q \approx \frac{k}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2k}}^{+\frac{\Delta x}{2k}} k^2 t^2 dt = \frac{k^3}{\Delta x \cdot 3} \cdot 2 \left(\frac{\Delta x}{2k} \right)^3 = \frac{\Delta x^2}{12}. \quad (9.10)$$

Izkaže se, da je ocena (9.10) povprečne moči signala $e_Q(t)$ uporabna za $q > 128$ oziroma $n > 7$.

Spekter močnostne gostote $\phi_{QQ}(\omega)$ signala $e_Q(t)$

Naj bo $x(t)$ stacionaren ergodičen signal, ki je amplitudno omejen na območje 8-kratne standardne deviacije signala⁵,

$$-4\sigma < x(t) < +4\sigma,$$

in frekvenčno omejen z mejno frekvenco F .

Iz predpostavk o amplitudni omejitvi in ergodičnosti signala $x(t)$ je mogoče pridobiti oceno spektra močnostne gostote signala $e_Q(t)$, ki jo izvedemo preko ocene njegove avtokorelacije [2]:

$$\phi_{QQ}\left(\frac{\omega}{W}\right) = \phi_{QQ}(\gamma) \approx \frac{k}{4\pi^3} \sqrt{\frac{3k}{2\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{3k\gamma^2}{8n^2\pi}}, \quad (9.11)$$

⁴Pri tem privzamemo tudi, da kvantizacijsko območje pokriva celotni amplitudni razpon signala:

$$0 \leq x(t) < q \cdot \Delta Q.$$

V nasprotnem primeru bi sicer pri mejnih vrednostih lahko dobili poljubno veliko vrednost kvantizacijske napake.

⁵Standardno deviacijo signala σ – kvadrat variance – smo definirali v izrazu (7.33), na strani 171.

kjer je

$$\begin{aligned} W &= 2\pi F, \\ k &= \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Iz opazovanja poteka ocene (9.11) je mogoče razbrati, da je za $q > 128$ spekter močnostne gostote $\phi_{QQ}(\gamma)$ približno konstanten za $|\gamma| < 40$.

Komentar

Spekter močnostne gostote signala kvantizacijske napake $\phi_{QQ}(\omega)$ je torej približno konstanten na 40-krat širšem frekvenčnem območju, kot je frekvenčna širina signala $x(t)$. Zato za $q > 128$ lahko privzamemo, da ima signal $e_Q(t)$ lastnosti *belega šuma*⁶.

Vpliv kvantizacije na vzorčenje

Iz zapisa relacije (9.9)

$$x_Q(t) = x(t) + e_Q(t)$$

sledi, da je potrebno v fazi digitalizacije signala $x(t)$ treba vzorčiti kvantiziran signal $x_Q(t)$. Spekter $\phi_{x_Q x_Q}(\omega)$ zaradi (9.11) ni več frekvenčno omejen s frekvenco W in zato zanj ugotovitev iz izreka (9.1.1) ne velja. Zaradi napak, ki jih naredimo pri kvantizaciji, digitalnega signala tudi teoretično ne moremo povsem natančno reproducirati. Kako lahko vpliv kvantizacijske napake zmanjšamo?

Opazujmo razmerje med povprečno močjo signala kvantizacijske napake $e_Q(t)$ in povprečno močjo signala $x(t)$ ter pogledjmo, kako se vpliv spektra vzorčenega signala kvantizacijske napake na frekvenčnem intervalu $-W < \omega < W$ spreminja v odvisnosti od širine intervala vzorčenja t_0 (slika 9.16).

Ko je $t_0 = \frac{1}{2F}$, je situacija najbolj neugodna. Razmerje $\varrho_Q^2|_{min}$ med močjo P_S signala $x(t)$ in močjo P_Q signala $e_Q(t)$ v tem primeru lahko ocenimo kar z

$$\varrho_Q^2|_{min} = \frac{P_S}{P_Q} \approx \frac{12P_S}{(\Delta x)^2}. \quad (9.12)$$

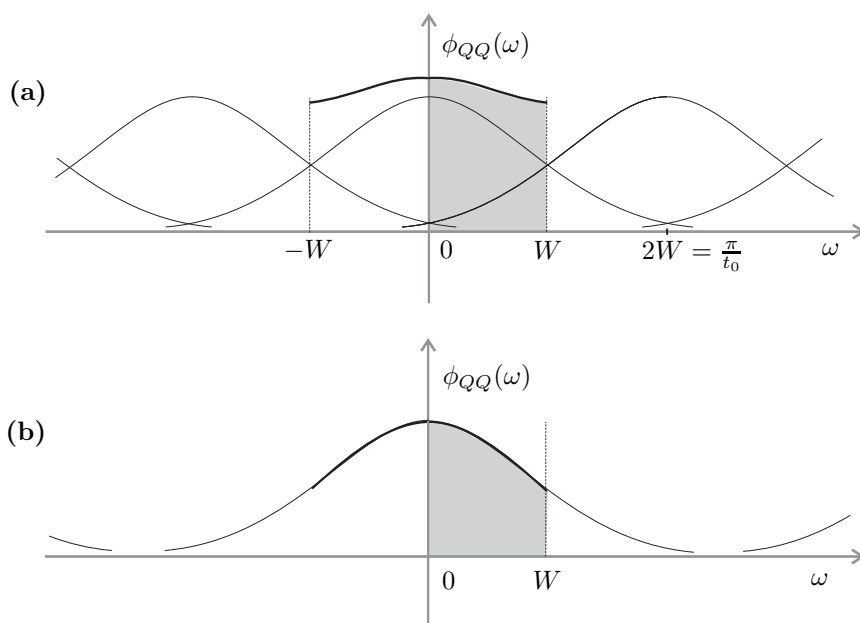
Ko vrednost intervala vzorčenja manjšamo, v najboljšem primeru lahko dosežemo situacijo, ki je prikazana na sliki 9.16 (b). Tedaj je razmerje moči $\varrho_Q^2|_{max}$ enako

$$\varrho_Q^2|_{max} = \frac{P_S}{\int_{-1}^1 \phi_{QQ}(\gamma) d\gamma}.$$

Do te mere lahko zvečamo razmerje ϱ_Q^2 s krajsanjem intervala vzorčenja t_0 .

Kot sledi iz ocene (9.12), ϱ_Q^2 najučinkoviteje zvečamo, če zmanjšamo kvantizacijski razmik Δx oziroma povečamo število bitov kvantizatorja.

⁶Glej razdelek 7.3 na strani 181, kjer je *beli šum* definiran.



Slika 9.16: Vpliv spektra močnostne gostote $\phi_{QQ}(\omega)$ signala kvantizacijske napake $e_Q(t)$ pri vzorčenju. (a) pri *Sahnonovi* frekvenci vzorčenja (9.1) in (b) v "idealnem" primeru, ko $t_0 \rightarrow 0$.

Za razmerje ϱ_Q^2 v izrazu (9.12), izraženo v decibelih (dB), lahko za $n > 6$ uporabimo preprosto linearno oceno [2]

$$10 \log \varrho_Q^2|_{min} \approx 6n - 7,2 \quad [\text{dB}] , \quad (9.13)$$

kjer je $q = 2^n$.

Primer 9.1

Poglejmo, kakšne vrednosti števila kvantizacijskih nivojev bi dobili, če bi želeli dovolj natančno kvantizirati govorni signal. V analogni telefoniji velja, da je še dopustno razmerje signal/šum enako 20 dB. Pri razmerju signal/šum enakem 30 dB pa človeško uho ne zazna več razlik.

Rešitev

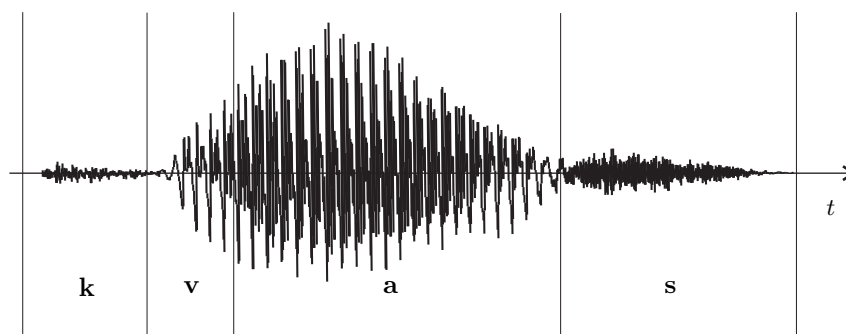
Iz relacije 9.13 dobimo

$$\begin{aligned} 20 &\approx 6n - 7,2 , \\ n &\approx \frac{27,2}{6} \approx 5 . \end{aligned}$$

Izkaže pa se, da $n = 5$ oziroma $q = 32$ ne zadoščata. Razlog je v tem, ker govorni signal ni stacionaren, kot to predpostavljamo v zgornjem razdelku na strani 224. Posledica te predpostavke je tudi izraz (9.13)!

Komentar

Kot smo o tem že govorili v razdelku 8.3.3 na strani 202, je govorni signal izrazito nestacionaren naključni signal. Njegova nestacionarnost dejansko opredeljuje njegovo informacijsko vsebino, ki je določena z osnovnimi glasovi nekega jezika. Različni glasovi se v veliki meri razlikujejo tudi po energiji in posledično tudi po velikosti amplitude (slika 9.17). S premajhnim številom kvantizacijskih nivojev bi zato nizkoenergijske dele govora⁷ premalo natančno opredelili in pri kasnejši reprodukciji med njimi ne bi mogli več razlikovati.



Slika 9.17: Segmentirani govorni signal izrečene besede *kvas*. Opazne so razlike med amplitudnim obsegom glasov **k** in **s** ter **a**.

Pri linearni kvantizaciji za telefonsko kvaliteto govornega signala v praksi zadošča 12-bitna kvantizacija. Z uporabo nelinearne kvantizacije⁸ lahko število bitov pri govornem signalu zmanjšamo na 8 bitov.

9.3 Diskretna Fourierova transformacija

Ko je signal podan v digitalni obliki $\{f(nt_0)\}$, njegovega spektra ne moremo več določiti z uporabo Fourierove transformacije, ki je definirana z določenim integralom

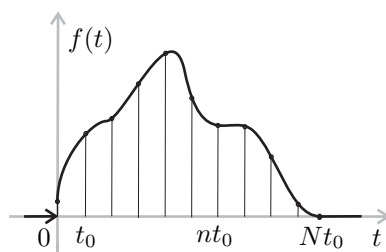
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt .$$

Uporabiti je potrebno nek numerični postopek ocene integrala. Pri digitalni obdelavi signalov je običajna numerična metoda za ocenjevanje spektra signala, ki smo ga prevedli v digitalno obliko, postopek, ki ga imenujemo *diskretna Fourierova transformacija (DFT)*⁹.

⁷V slovenščini so to na primer glasovi: *f, h, s, z, k ...* .

⁸Glej na primer delo [3].

⁹V strokovni literaturi bomo večkrat naleteli tudi na oznako **FFT**, ki je kratica za angleški naziv "Fast Fourier Transform". **FFT** je le posebna hitra metoda določanja **DFT**, v kateri minimiziramo potrebno število aritmetičnih operacij [4].

Slika 9.18: Signal $f(t)$

Zaradi praktične zahteve po končnem času numerične obdelave lahko obravnavamo le časovno omejene signale $f(t)$ oziroma digitalne signale $\{f(nt_0)\}$, predstavljene s končno dolžino niza vrednosti. Po dogovoru zato predpostavimo, da je signal $f(t)$ (slika 9.18), katerega spekter želimo oceniti, od nič različen le na končnem časovnem intervalu $[0, Nt_0)$, ali drugače

$$f(t) = 0 \iff t < 0 \text{ ali } t \geq Nt_0 .$$

Ta predpostavka zaradi lastnosti spremembe spektra pri premiku signala po časovni osi (5.24) ne pomeni bistvene omejitve. Če predpostavimo, da signal vzorčimo vsaj povsod tam, kjer je od nič različen, parameter N določa število vzorcev digitalnega signala $\{f(nt_0)\}$.

Kot običajno nadomestimo

$$\begin{aligned} dt &\longrightarrow t_0 , \\ t &\longrightarrow nt_0 , \\ \int &\longrightarrow \sum \end{aligned}$$

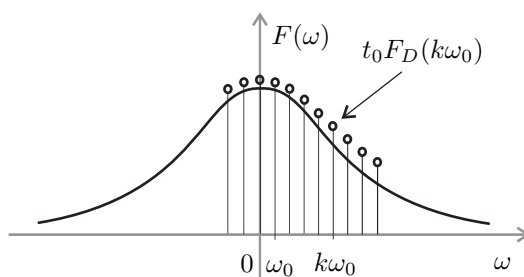
in dobimo oceno

$$F(\omega) = \int_0^{Nt_0} f(t) e^{-j\omega t} dt \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-j\omega t_0 n} t_0 .$$

Zgornji izraz lahko uporabimo za numerično oceno spektra le za končno število različnih frekvenc. Zato je smiselno, kot pri vzorčenju signala s stalnim časovnim razmakom t_0 , tudi na frekvenčni osi ω izbrati frekvenčni razmak ω_0 in za neko končno število mnogokratnikov $k\omega_0$ določiti ocene spektra (slika 9.19).

Tako dobimo

$$F(\omega)|_{\omega=k\omega_0} \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} t_0 = t_0 \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} .$$



Slika 9.19: Spekter $F(\omega)$ signala $f(t)$ in ocene spektra $t_0 F_D(k\omega_0)$

■ Izraz

$$F_D(k\omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} \quad (9.14)$$

imenujemo *diskretna Fourierova transformacija* (DFT) digitalnega signala $\{f(nt_0)\}$.

Če povzamemo, velja

$$F(\omega)|_{\omega=k\omega_0} \approx t_0 F_D(k\omega_0). \quad (9.15)$$

Pričakujemo lahko, da bo približek tem boljši, čim ožji bo interval vzorčenja t_0 .

Izraz (9.14) definira preslikavo

$$\text{DFT} : \{f(nt_0)\} \longrightarrow \{F_D(k\omega_0)\},$$

oziroma

$$\mathcal{F}_D(\{f(nt_0)\}) = \{F_D(k\omega_0)\},$$

ki je definirana za vsak končen ω_0 in za vse cele k .

Enako kot pri Fourierovi transformaciji so tudi vrednosti DFT v splošnem kompleksne. Na enak način kot pri Fourierovi transformaciji v razdelku 5.3 tudi v tem primeru vrednosti DFT izrazimo z realnimi diskretnimi spektri $C_D(k\omega_0)$, $D_D(k\omega_0)$, $|F_D(k\omega_0)|$ in $\theta_D(k\omega_0)$:

$$\begin{aligned} F_D(k\omega_0) &= C_D(k\omega_0) + jD_D(k\omega_0), \\ F_D(k\omega_0) &= |F_D(k\omega_0)| \cdot e^{j\theta_D(k\omega_0)}. \end{aligned}$$

Ugotovimo, kakšne so lastnosti DFT!

9.3.1 Linearnost

DFT je linearna transformacija.

Izpeljava

Ker je DFT definirana z vsoto produktov vrednosti $f(nt_0)$ in $e^{-jk\omega_0 t_0 n}$, velja

$$\mathcal{F}_D(\{f_1(nt_0)\} + \{f_2(nt_0)\}) = \{F_{1D}(k\omega_0)\} + \{F_{2D}(k\omega_0)\}$$

in

$$\mathcal{F}_D(\alpha \{f(nt_0)\}) = \alpha \{F_D(k\omega_0)\} .$$

Komentar

Kot smo ugotovili že v razdelku 5.4.2, je tudi Fourierova transformacija linearna, zato se v tej lastnosti DFT in Fourierova transformacija ujemata.

9.3.2 Diskretna Fourierova transformacija realnih digitalnih signalov

Naj bo digitalni signal $\{f(nt_0)\}$ realen. Zvezo (9.14) lahko širše zapišemo kot

$$F_D(k\omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} (f(nt_0) \cos k\omega_0 t_0 n - j f(nt_0) \sin k\omega_0 t_0 n) .$$

Realni diskretni spekter $C_D(k\omega_0)$ je v tem primeru

$$C_D(k\omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) \cos k\omega_0 t_0 n \quad (9.16)$$

in imaginarni diskretni spekter

$$D_D(k\omega_0) = - \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) \sin k\omega_0 t_0 n . \quad (9.17)$$

Ker je $\cos k\omega_0 t_0 n$ soda in $\sin k\omega_0 t_0 n$ liha funkcija $k\omega_0$, je spekter $C_D(k\omega_0)$ soda in spekter $D_D(k\omega_0)$ liha funkcija:

$$\begin{aligned} C_D(-k\omega_0) &= C_D(k\omega_0) \\ D_D(-k\omega_0) &= -D_D(k\omega_0) . \end{aligned}$$

Podobno bi lahko ugotovili za diskretni spekter amplitudne gostote $|F_D(k\omega_0)|$ in diskretni fazni spekter $\Theta_D(k\omega_0)$:

$$\begin{aligned} |F_D(-k\omega_0)| &= |F_D(k\omega_0)| \\ \Theta_D(-k\omega_0) &= -\Theta_D(k\omega_0) . \end{aligned}$$

Komentar

Tudi v teh lastnostih se DFT in Fourierova transformacija ujemata.

9.3.3 Periodičnost diskretne Fourierove transformacije

Že v komentarju izraza (9.14) smo omenili, da je korak ω_0 v frekvenčnem prostoru lahko kakršnakoli končna realna vrednost. Izkaže pa se, da je predvsem zaradi sledečih lastnosti DFT za ω_0 smiselno izbrati vrednost

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{Nt_0}. \quad (9.18)$$

Taka izbira vrednosti ω_0 nas posebej ne omejuje, ker lahko z večanjem vrednosti parametra N ω_0 poljubno zmanjšamo. Večanje števila N (število vzorcev signala $\{f(nt_0)\}$) dejansko pomeni, da že vzorčenim vrednostim signala $f(t)$ dodamo še ustrezno število ničel¹⁰.

Če za ω_0 izberemo vrednost, določeno z (9.18), velja, da je DFT periodična z vrednostjo periode $N\omega_0$:

$$F_D(k\omega_0 + pN\omega_0) = F_D(k\omega_0) \quad \text{za vsak} \quad k, p \in \mathbb{Z}. \quad (9.19)$$

Dokažimo zvezo (9.19)!

Izpeljava

Upoštevajmo (9.14) in (9.18)

$$\begin{aligned} F_D(k\omega_0 + pN\omega_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-j(k\omega_0 + pN\omega_0)t_0 n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} \cdot e^{-jpN\omega_0 t_0 n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} \cdot e^{-jp2\pi n} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} \cdot 1 \\ &= F_D(k\omega_0). \end{aligned}$$

Komentar

Pri določanju vrednosti DFT s frekvenčnim razmakom $\omega_0 = \frac{2\pi}{Nt_0}$ je zato smiselno določiti le eno periodo, to je N vrednosti, na primer za $k = 0, 1, \dots, N-1$. To je toliko vrednosti, kot je bilo vzorčenih vrednosti signala $f(t)$.

9.3.4 Inverzna diskretna Fourierova transformacija

Pri predpostavki, da je ω_0 določen z (9.18), obstaja *inverzna diskretna Fourierova transformacija* (IDFT¹¹)

$$\text{IDFT} : \quad \{F_D(k\omega_0)\} \longrightarrow \{f(nt_0)\},$$

¹⁰Postopek dodajanja ničel vzorčenim vrednostim signala v angleški strokovni literaturi imenujejo "zero padding".

¹¹Podobno kot za DFT pomeni kratica FFT, za IDFT kratica IFFT (Inverse Fast Fourier Transform) pomeni kratico za hitri postopek določanja vrednosti IDFT.

določena z

$$f(nt_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_D(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t_0 n} . \quad (9.20)$$

Izpeljava

Preverimo zvezo (9.20). Pri tem upoštevajmo izraz (9.14) za določitev vrednosti DFT in zamenjajmo vrstni red seštevanja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_D(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t_0 n} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} f(mt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 m} \right] e^{jk\omega_0 t_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(mt_0) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\omega_0 t_0 (n-m)} \right] . \end{aligned}$$

Upoštevajmo, da je

$$\omega_0 t_0 = \frac{2\pi}{N}$$

in označimo

$$S_{n-m} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk \frac{2\pi}{N} (n-m)} .$$

Izraz za določitev IDFT zdaj krajše zapišemo kot

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_D(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(mt_0) \cdot S_{n-m} . \quad (9.21)$$

S_{n-m} lahko zapišemo kot

$$S_{n-m} = 1 + \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{(N-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k , \quad (9.22)$$

kjer je

$$\alpha = e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m)} .$$

S_{n-m} je torej vsota prvih N členov geometrijskega zaporedja in je zato enaka

$$S_{n-m} = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} = \frac{1 - e^{j2\pi(n-m)}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} (n-m)}} . \quad (9.23)$$

Ker je

$$e^{j2\pi(n-m)} = 1 ,$$

je vrednost števca v izrazu (9.23) za S_{n-m} vedno enaka 0. Naj bo $0 \leq n < N$. Vrednost imenovalca je različna od 0 za vse $m \neq n$. Če je $m = n$, za S_0 dobimo nedoločen izraz

$$S_0 = \frac{1 - e^{j2\pi 0}}{1 - e^{j \frac{2\pi}{N} 0}} .$$

Ker je $\alpha = 1$, vrednost S_0 lahko določimo iz (9.22):

$$S_0 = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N .$$

Za vrednosti vsote S_{n-m} za

$$0 \leq n < N$$

tako dobimo

$$S_{n-m} = \begin{cases} N, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} .$$

Če ta rezultat upoštevamo v izrazu (9.21), potrdimo veljavnost izraza za izračun IDFT:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_D(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(mt_0) \cdot S_{n-m} = \frac{1}{N} f(nt_0) \cdot N = f(nt_0) .$$

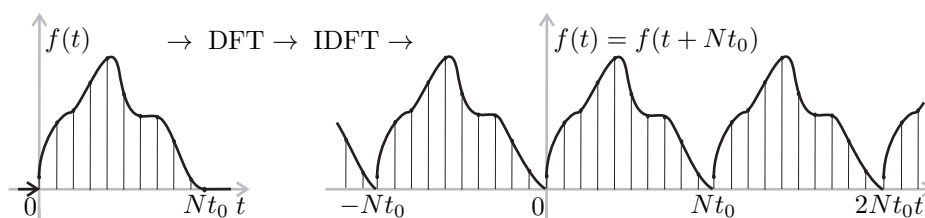
9.3.5 Periodičnost inverzne diskretne Fourierove transformacije

Izraz (9.20) za določanje IDFT ni definiran samo za $0 \leq n \leq N - 1$, temveč za poljubni celi n . Na isti način, kot smo dokazali periodičnost DFT, bi tudi tokrat lahko ugotovili, da je IDFT periodična s periodo Nt_0 :

$$f(nt_0 + pNt_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_D(k\omega_0) e^{jk\omega_0(t_0 n + pNt_0)} = f(nt_0) . \quad (9.24)$$

Komentar

Z vzorčenjem in določanjem DFT in IDFT neperiodičnega signala $f(t)$ tako nazaj pridobimo periodični diskretni signal s periodo Nt_0 . Situacijo ponazarja slika 9.20.



Slika 9.20: Vzorčenje, DFT in IDFT neperiodičnega signala $f(t)$

9.3.6 Zmnožek diskretnih Fourierovih transformacij

Pri analizi linearnih stacionarnih sistemov je zelo pomembna lastnost konvolucije (6.18)

$$f_i(t) * f_j(t) \longleftrightarrow F_i(\omega) \cdot F_j(\omega) ,$$

ki velikokrat omogoči določitev prevajalne funkcije sistema¹². Smiselno se je vprašati, ali velja enaka lastnost tudi za DFT?

Naj bo

$$\{F_{D_3}(k\omega_0)\} = \{F_{D_1}(k\omega_0) \cdot F_{D_2}(k\omega_0)\} ,$$

kjer je

$$\mathcal{F}_D(\{f_1(nt_0)\}) = \{F_{D_1}(k\omega_0)\} \quad \text{in} \quad \mathcal{F}_D(\{f_2(nt_0)\}) = \{F_{D_2}(k\omega_0)\} .$$

Za oba digitalna signala $\{f_1(nt_0)\}$ in $\{f_2(nt_0)\}$ naj velja, da imata enako število vzorcev N . Določimo IDFT niza vrednosti $\{F_{D_3}(k\omega_0)\}$.

Označimo z

$$\{f_3(nt_0)\} = \mathcal{F}_D^{-1}(\{F_{D_3}(k\omega_0)\})$$

in zapišimo DFT signalov $\{f_1(nt_0)\}$ in $\{f_2(nt_0)\}$ z izrazom (9.14):

$$F_{D_1}(k\omega_0) = \sum_{m=0}^{N-1} f_1(mt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 m} ,$$

$$F_{D_2}(k\omega_0) = \sum_{i=0}^{N-1} f_2(it_0) e^{-jk\omega_0 t_0 i} .$$

Zamenjajmo vrstni red seštevanja:

$$\begin{aligned} f_3(nt_0) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_{D_1}(k\omega_0) \cdot F_{D_2}(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} f_1(mt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 m} \right] \cdot \left[\sum_{i=0}^{N-1} f_2(it_0) e^{-jk\omega_0 t_0 i} \right] e^{jk\omega_0 t_0 n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f_2(it_0) f_1(mt_0) \left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\omega_0 t_0 (n-m-i)} \right] . \end{aligned}$$

Podobno, kot smo to ugotovili pri izpeljavi relacije za določanje IDFT¹³, tudi zdaj lahko zaključimo, da je

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\omega_0 t_0 (n-m-i)} = \begin{cases} N , & i = (n-m) \bmod N \\ 0 , & i \neq (n-m) \bmod N . \end{cases}$$

¹²Glej izraz (8.5) v razdelku 8.1 na strani 191.

¹³Glej razdelek 9.3.4 na strani 231.

Pri tem enačba $i = (n - m) \bmod N$ pove, da je i enak ostanku pri celoštevilskem deljenju razlike $n - m$ z N .

Od tod dobimo

$$f_3(nt_0) = \sum_{i=0}^{N-1} f_1((n-i)t_0) f_2(it_0) = \sum_{i=0}^{N-1} f_1(it_0) f_2((n-i)t_0) . \quad (9.25)$$

Izraz (9.25), ki je, kot vidimo, tudi simetričen, imenujemo *diskretna periodična konvolucija*:

- Če povzamemo, smo iz zgornje izpeljave ugotovili, da produktu diskretnih Fourierovih transformacij dveh signalov v časovnem prostoru ustreza diskretna periodična konvolucija:

$$\left\{ \sum_{i=0}^{N-1} f_1((n-i)t_0) f_2(it_0) \right\} \longleftrightarrow \{F_{D_1}(k\omega_0) \cdot F_{D_2}(k\omega_0)\} . \quad (9.26)$$

- Diskretna konvolucija (9.25) je periodična, ker pri njeni določitvi signala $\{f_1(nt_0)\}$ in $\{f_2(nt_0)\}$ razumemo kot periodična signala s periodo Nt_0 . Od tod in tudi zaradi lastnosti periodičnosti IDFT pa sledi, da je $\{f_3(nt_0)\}$ periodičen signal z enako periodo Nt_0 .

Komentar

Lastnost periodičnosti izraza (9.25) lahko postane moteča pri modeliranju nekaterih relacij, ki jih sicer lahko opišemo s konvolucijo neperiodičnih signalov.

Vzemimo, da želimo z uporabo DFT in IDFT določiti prevajalno funkcijo oziroma impulzni odziv linearnega stacionarnega sistema. Pri tem se želimo nasloniti na ugotovitve iz razdelka 8.1. Vhodni $u(t)$ in izhodni signal $y(t)$ linearnega stacionarnega sistema in odziv tega sistema $h(t)$ na enotin impulz $\delta(t)$ povezuje konvolucija neperiodičnih signalov oziroma zmnožek spektrov:

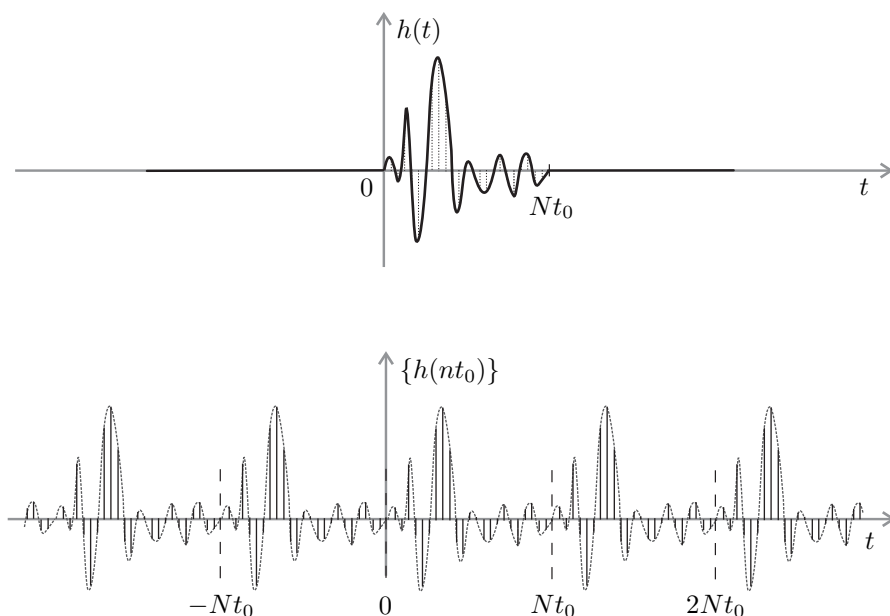
$$y(t) = h(t) * u(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega) \cdot U(\omega) .$$

Vzemimo, da smo signale $u(t)$, $y(t)$ in $h(t)$ vzorčili s stalnim razmakom vzorčenja t_0 in pridobili ustrezne digitalne signale. Zgornjo zvezo med vhodnim in izhodnim signalom lahko v tem primeru opišemo s približkom

$$y(nt_0) = \sum_{i=0}^n u(it_0) h((n-i)t_0) t_0 \approx y(t) = \int_0^t u(\tau) h(t-\tau) d\tau \Big|_{t=nt_0} . \quad (9.27)$$

Vzemimo, da želimo približno vrednost odziva linearnega stacionarnega sistema pridobiti tako, da najprej določimo DFT vhodnega signala in odziva sistema na enotin impulz in potem še IDFT zmnožka diskretnih spektrov. Iz lastnosti (9.26) za vrednosti $y(nt_0)$ dobimo relacijo

$$y(nt_0) = \sum_{i=0}^{N-1} u(it_0) h((n-i)t_0) . \quad (9.28)$$



Slika 9.21: Odziv na enotin impulz $h(t)$ in prirejeni periodični digitalni signal $\{h(nt_0)\}$

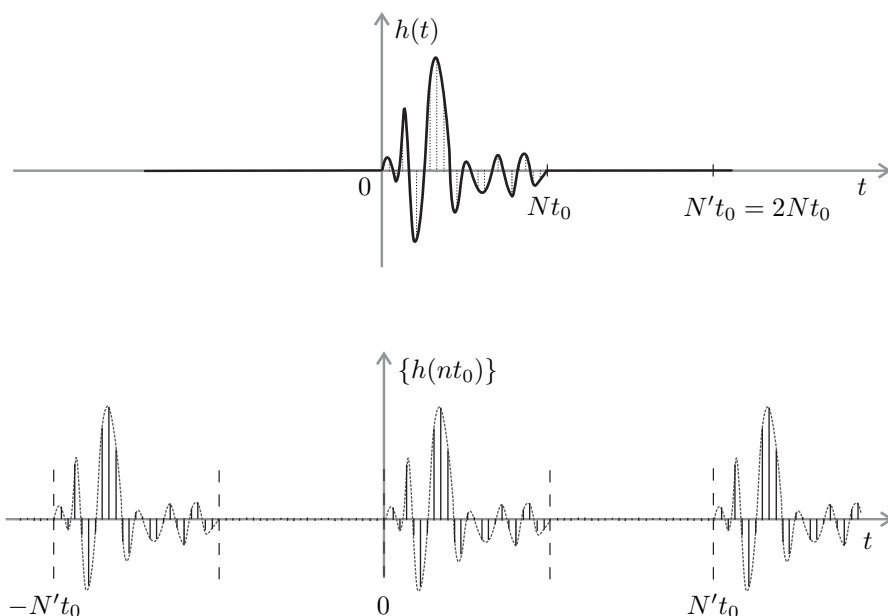
Bistvena razlika med izrazoma (9.27) in (9.28) je v tem, da je potrebno pri določanju vrednosti $y(nt_0)$ iz (9.28) razumeti digitalna signala $\{u(nt_0)\}$ in $\{h(nt_0)\}$ kot periodična s periodo Nt_0 . Za digitalni signal $\{h(nt_0)\}$, izveden iz signala $h(t)$, to pomeni, da je to signal, ki je zaradi svoje periodičnosti različen od nič tudi za čase, ko je $t < 0$ (slika 9.21).

Tak matematični model odziva na enotin impulz pa je v nasprotju z osnovno predpostavko vzročnosti, ki ji mora zadoščati. Ker je $h(t)$ definiran kot odziv sistema na vhodni signal ob času 0 ($\delta(t)$), je za $t < 0$, $h(t) = 0$. Relacija (9.27) to lastnost implicitno upošteva, (9.28) pa ji nasprotuje. Od tod sledi, da bi pri uporabi DFT oziroma IDFT za analizo linearnih stacionarnih sistemov v predlagani obliki uporabili neustrezni matematični model in zaradi tega pridobili neustrezne ocene.

Da se izognemo neugodnemu učinku periodičnosti, uporabimo razmeroma preprost "trik". Signale, ki jih analiziramo z uporabo DFT in IDFT, vzorčimo dalj časa, kot so različni od 0. To pomeni, da vzorčenim vrednostim signalov dodajamo ničle. Izkaže se, da učinek periodičnosti izničimo že, če vzorčenemu signalu dodamo $N - 1$ ničel, v praksi pa ponavadi število vzorcev kar podvojimo:

$$N' = 2N ,$$

kar pomeni, da vzorčenemu signalu dodamo še N ničel (slika 9.22). S periodičnim ponavljanjem tako vzorčenega signala dosežemo, da je signal enak 0 na intervalih $(-Nt_0, 0)$ in $(Nt_0, N't_0)$.



Slika 9.22: Odziv na enotni impulz $h(t)$ in prirejeni periodični digitalni signal $\{h(nt_0)\}$ s povečanim številom vzorcev $N' = 2N$

Za izraz (9.28) za $0 \leq n < N'$ tako dobimo

$$y(nt_0) = \sum_{i=0}^{N'-1} u(it_0)h((n-i)t_0) = \sum_{i=0}^n u(it_0)h((n-i)t_0),$$

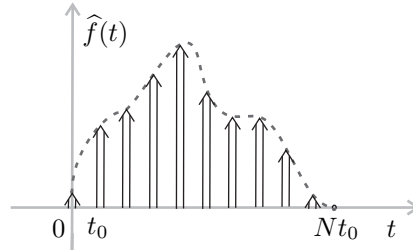
ki se samo za faktor velikosti t_0 razlikuje od izraza (9.27) za aproksimacijo neperiodične konvolucije med signaloma $h(t)$ in $u(t)$.

Pri ocenjevanju signalov, ki so povezani s konvolucijsko relacijo oziroma zmnožkom spektrov v frekvenčnem prostoru, je pri uporabi DFT in IDFT signale potrebno ustrezno dolgo vzorčiti!

9.3.7 Povezava med Fourierovo transformacijo in diskretno Fourierovo transformacijo

Signalu $f(t)$ priredimo nov signal $\hat{f}(t)$ (slika 9.23) z enačbo:

$$\hat{f}(t) = t_0 \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0)\delta(t - nt_0). \quad (9.29)$$



Slika 9.23: Signal $\hat{f}(t)$

Signal $\hat{f}(t)$ lahko razumemo kot približek signala $f(t)$ v smislu, da je

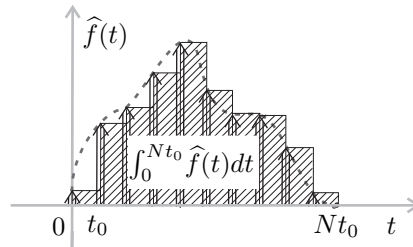
$$\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b \hat{f}(t)dt$$

za poljubni meji integriranja a in b , saj je (slika 9.24)

$$\int_{kt_0}^{lt_0} \hat{f}(t)dt = \sum_{n=k}^{l-1} f(nt_0) \cdot t_0$$

res enostaven približek integrala

$$\int_{kt_0}^{lt_0} f(t)dt .$$



Slika 9.24: Prikaz vrednosti integrala signala $\hat{f}(t)$ za $0 \leq t < Nt_0$.

Določimo kompleksni spekter $\hat{F}(\omega)$ signala $\hat{f}(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{F}(\omega) &= \mathcal{F} \left(t_0 \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) \delta(t - nt_0) \right) = t_0 \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) \mathcal{F}(\delta(t - nt_0)) \\ &= t_0 \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-j\omega t_0 n} . \end{aligned}$$

Za $\omega = k\omega_0$ od tod sledi

$$\hat{F}(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} = t_0 \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0) e^{-jk\omega_0 t_0 n} = t_0 \cdot F_D(k\omega_0) . \quad (9.30)$$

Zveza (9.30) poda zvezo med spektrom $\widehat{F}(\omega)$ in vrednostmi $\{F_D(k\omega_0)\}$. Določimo še povezavo med spektroma $\widehat{F}(\omega)$ in $F(\omega)$.

Ker je signal $f(t)$ izven intervala $[0, Nt_0)$ enak 0, lahko izraz za $\widehat{f}(t)$ posplošimo na vse cele vrednosti indeksa n

$$\widehat{f}(t) = t_0 \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0)\delta(t - nt_0) = t_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nt_0)\delta(t - nt_0)$$

in ker je vrednost impulzov v izrazu (9.29) $\delta(t - nt_0) = 0$ za $t \neq nt_0$, lahko zapis $\widehat{f}(t)$ še naprej posplošimo:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t) &= t_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nt_0)\delta(t - nt_0) = t_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - nt_0) \\ &= t_0 f(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nt_0). \end{aligned}$$

$\widehat{f}(t)$ torej lahko predstavimo kot zmnožek signala $f(t)$ in periodične funkcije $\delta_{t_0}(t)$:

$$\widehat{f}(t) = t_0 f(t) \cdot \delta_{t_0}(t). \quad (9.31)$$

Določimo Fourierovo transformacijo izraza (9.31)!

Zaradi lastnosti konvolucije med spektri signalov (6.19) dobimo

$$\widehat{F}(\omega) = \mathcal{F}(t_0 f(t) \cdot \delta_{t_0}(t)) = \frac{t_0}{2\pi} F(\omega) * \mathcal{F}(\delta_{t_0}(t)).$$

V razdelku 5.6, kjer smo obravnavali Fourierovo transformacijo periodičnih signalov, smo na strani 128 izpeljali zvezo

$$\mathcal{F}(\delta_{t_0}(t)) = \frac{2\pi}{t_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{t_0}\right).$$

Ker je zaradi (9.18) $\frac{2\pi}{t_0} = N\omega_0$, sedaj velja

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\omega) &= \frac{t_0}{2\pi} F(\omega) * \frac{2\pi}{t_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - nN\omega_0) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - u - nN\omega_0) du. \end{aligned}$$

Zamenjajmo vrstni red seštevanja in integriranja ter upoštevajmo, da je funkcija $\delta(t)$ soda funkcija:

$$\widehat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) \delta(u - (\omega - nN\omega_0)) du.$$

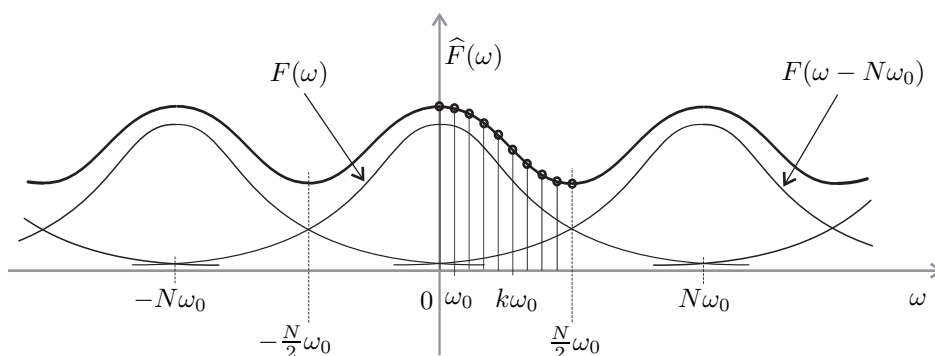
Zaradi tipalne lastnosti funkcije $\delta(t)$ (5.42) dobimo

$$\widehat{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - nN\omega_0). \quad (9.32)$$

Iz izraza (9.32) je razvidno, da lahko kompleksni spekter $\widehat{F}(\omega)$ signala $\widehat{f}(t)$ predstavimo kot neskončno vsoto za frekvenčni zamik $N\omega_0$ zamaknjenih spektrov $F(\omega)$ signala $f(t)$. Zaradi zveze (9.30) pa lahko zapišemo povezavo, ki pojasnjuje relacijo med vrednostmi DFT in spektrom signala $f(t)$:

$$t_0 F_D(k\omega_0) = \widehat{F}(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - nN\omega_0) \right]_{\omega=k\omega_0}. \quad (9.33)$$

Situacija (9.33) je za primer realnih spektrov ponazorjena na sliki 9.25. Na sliki je lepo razvidna lastnost (9.19) periodičnosti DFT in frekvenčni interval, na katerem lahko DFT razumemo kot približek Fourierove transformacije signala. Sicer lahko iz zveze (9.33) izvedemo naslednje pomembne ugotovitve:



Slika 9.25: Spektar $\widehat{F}(\omega)$

- Spektar signala lahko z DFT ocenimo le na frekvenčnem območju osnovne periode:

$$t_0 F_D(k\omega_0) \approx F(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0} \text{ le za } -\frac{N}{2}\omega_0 < \omega < +\frac{N}{2}\omega_0. \quad (9.34)$$

- Ker je

$$\frac{N}{2}\omega_0 = \frac{\pi}{t_0},$$

je frekvenčni obseg ocene spektra z DFT obratno sorazmeren z velikostjo intervala vzorčenja t_0 .

- Kot lahko razberemo iz (9.33), oceno spektra z DFT "kvarijo" zamaknjeni spektri $F(\omega - nN\omega_0)$. Zato bo ocena spektra pri dani frekvenci ω tem boljša, čim večji bo osnovni zamik spektrov $N\omega_0$. Ker je

$$N\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0}, \quad (9.35)$$

to pomeni, da bo ocena tem boljša, čim manjši bo t_0 .

- Ker za spektre neperiodičnih signalov običajno velja¹⁴, da je

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(\omega) = 0 ,$$

bo največkrat

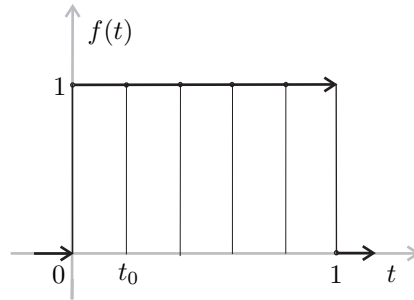
$$|F(0 - N\omega_0)| \ll |F(\frac{N}{2}\omega_0 - N\omega_0)| ,$$

in zato ocena spektra z DFT boljša za nižje frekvence.

Primer 9.2

Določimo DFT za signal $f(t)$, ki ga vzorčimo s časovnim razmikom $t_0 = \frac{1}{5}$ povsod tam, kjer je različen od 0 (slika 9.26):

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{drugod.} \end{cases}$$



Slika 9.26: Signala $f(t)$ in njegovi vzorci $f(n\frac{1}{5})$

Rešitev

$$\{f(nt_0)\} = \{1, 1, 1, 1, 1\} . \quad (9.36)$$

Iz zgornjega izraza razberemo:

$$N = 5 , \quad (9.37)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{Nt_0} = 2\pi \quad \text{in} \quad (9.38)$$

$$\omega_0 t_0 = \frac{2\pi}{5} . \quad (9.39)$$

Po (9.14) je

$$F_D(k\omega_0) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nt_0)e^{-jk\omega_0 t_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jk\frac{2\pi}{5}n} . \quad (9.40)$$

¹⁴Kot na primer na sliki 9.25.

Za $k = 0, 1, \dots, 4$ je

$$\{F_D(k2\pi)\} = \{5, 0, 0, 0, 0\}. \quad (9.41)$$

Kako dober približek spektra $F(\omega)$ signala $f(t)$ smo dobili?

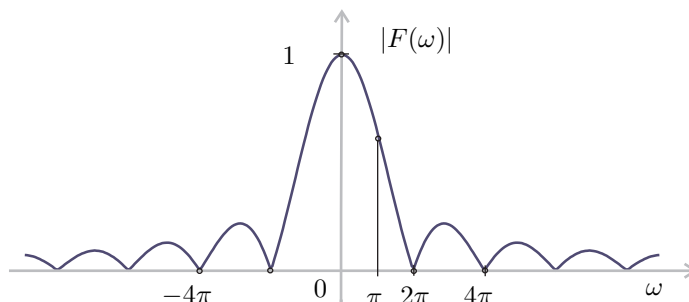
Glede na ugotovitve (9.34) velja, da je

$$F(\omega)|_{\omega=k2\pi} \approx t_0 F_D(k2\pi), \quad -4\pi \leq \omega \leq 4\pi.$$

Naša ocena je torej

$$\left\{ \frac{1}{5} F_D(k2\pi) \right\} = \{0, 0, 1, 0, 0\}, \quad k2\pi = -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi.$$

Določimo vrednosti spektra amplitudne gostote $|F(\omega)|$ signala $f(t)$ pri teh frekvencah.



Slika 9.27: Spekter amplitudne gostote $|F(\omega)|$ signala $f(t)$

Spekter signala $f(t + \frac{1}{2})$, ki je sod signal, smo določili že v primeru 5.3 na strani 108:

$$\mathcal{F}\left(f\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}.$$

Če upoštevamo še lastnost premika po časovni osi (5.24), dobimo (slika 9.27)

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left(f\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) e^{j\omega \frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} e^{j\frac{\omega}{2}}$$

in

$$|F(\omega)| = \left| \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} \right|. \quad (9.42)$$

Za dobimo $|F(\omega)|$ pri frekvencah $\omega = -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi$ natanko iste vrednosti kot s približno metodo DFT. Tako natančnega rezultata seveda ne smemo vedno pričakovati in je v tem primeru posledica izbire posebne oblike signala $f(t)$. Za isti signal ocenimo z DFT še vrednost amplitudnega spektra pri frekvenci $\omega = \pi$.

Iz (9.42) je

$$|F(\pi)| = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \doteq 0,637 .$$

Ker je $\pi < \omega_0$, je potrebno iz enačbe

$$\pi = k\omega_1 = k \frac{2\pi}{Nt_0}$$

določiti nov ustrezen korak ω_1 v frekvenčnem prostoru. Pri nespremenjeni vrednosti t_0 in $k = 1$ dobimo

$$N = \frac{2}{t_0} = 10 .$$

To pomeni, da moramo vzorčeni signal vzorčiti še pri petih dodanih časovnih trenutkih, oziroma vzorcu dodati še 5 ničel:

$$\{f(nt_0)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\} .$$

Torej:

$$\begin{aligned} F_D(\omega_1) &= F_D(\pi) = \sum_{n=0}^4 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{5}n} = \sum_{n=0}^4 \left(\cos \frac{\pi}{5}n - j \sin \frac{\pi}{5}n \right) \doteq 1 - j 3,078 , \\ t_0 |F_D(\omega_1)| &= \frac{1}{5} |F_D(\pi)| \doteq 0,647 . \end{aligned}$$

Vidimo, da v tem primeru res dobimo le približek prave vrednosti 0,637. Če želimo oceno spektra v skladu z ugotovitvijo (9.35) izboljšati, to lahko dosežemo tako, da zmanjšamo interval vzorčenja t_0 .

Vzemimo $t_0 = \frac{1}{10}$. V skladu s prejšnjim izvajanjem je, zato da bo $\omega_1 = \pi$, potrebno signal $f(t)$ vzorčiti pri $N = 20$ časovnih trenutkih:

$$\{f(nt_0)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} .$$

V tem primeru dobimo

$$t_0 |F_D(\omega_0)| = \frac{1}{10} |F_D(\pi)| = \frac{1}{10} \left| \sum_{n=0}^9 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{10}n} \right| \doteq 0,639 .$$

Za $t_0 = \frac{1}{20}$ na enak način dobimo oceno

$$t_0 |F_D(\omega_0)| = \frac{1}{20} |F_D(\pi)| \doteq 0,637 ,$$

ki se na prvih treh decimalnih mestih že ujema z vrednostjo spektra $|F(\pi)|$.

Literatura

- [1] L. Gyergyek: *Teorija signalov in obdelava signalov I. del*, ZAFER, 1991, str. 24–25.
- [2] G. Lukatela, D. Drajić, G. Petrović: 5.2. Srednja moč in spekter signala kvantizacijske napake, *Digitalne telekomunikacije*, Gradževinska knjiga, Beograd, 1978, str. 79–89.
- [3] G. Lukatela, D. Drajić, G. Petrović: 5.3. Nelinearna kvantizacija, *Digitalne telekomunikacije*, Gradževinska knjiga, Beograd, 1978, str. 90–98.
- [4] E. C. Ifeachor, B. W. Jervis: Discrete transforms, *Digital Signal Processing - A practical Approach*, Prentice Hall, 2002, str. 104–171.

Stvarno kazalo

A

amplitudna modulacija, 111, 113
amplitudni spekter
 periodični signali, 61–63, 67
avtokorelacija
 neperiodičnih signalov, 131, 135, 194
 energija, 132
 fazni spekter, 133
 frekvenčna predstavitev, 133, 137
 Hermitova simetrija, 132
 maksimalnost, 134
 sodost, 132, 136
 spekter energijske gostote, 134, 135
 zveznost, 135
periodični rep, 203
periodičnih signalov, 70, 75, 198
 frekvenčna predstavitev, 76
 fazni spekter, 76
 Hermitova simetrija, 75
 maksimalnost, 78
 periodičnost, 75
 povprečna moč, 76, 78
 sodost, 75
 zveznost, 79
stacionarnih naključnih signalov, 159,
 161, 172, 176, 179, 181, 184,
 185, 193, 198, 202, 205, 224
 časovno povprečje, 191, 197
 širina okenske funkcije, 204
 Fourierova transformacija, 162
 Hermitova simetrija, 161
 inverzna Fourierova transforma-
 cija, 162
izhodni signal, 191
limitna vrednost, 162, 177
maksimalnost, 161, 177
povprečna moč, 161

vhodni signal, 191

Wienerjev stavek, 162

zveznost, 163

avtokorelacijska funkcija, 169, 171, 172,
176

Č

časovna predstavitev, 100

časovni izrez signala, 152

časovni zamik, 168

D

DFT, 227

digitalizacija, 225

Diracov impulz, 123

Dirichlet Johann Peter Gustav Lejeune,
57

Dirichletovi pogoji, 57, 59, 60, 63, 66,
72, 100, 125, 152

diskretna Fourierova transformacija, 227,
229–237, 240–242

 frekvenčni obseg, 240

 linearnost, 229

 ocena, 240

 periodičnost, 231, 240

 preslikava, 229

 produkt, 235

 realni digitalni signali, 230

diskretna periodična konvolucija, 235

E

EKG, 45, 116

energija, 12, 13, 21, 26, 132, 134, 143

enotin impulz, 123

F

faktor režima vzorčenja, 216

fazni prostor, 158, 174, 175

fazni spekter

neperiodični signali, 101, 102, 109
 periodični signali, 61–63, 67
 FFT, 227
 filter
 idealni nizki, 218
 medianin, 205
 nizkopasovni, 205
 Fourier Baptist Joseph, 57
 Fourierov integral, 99, 100
 predstavitev, 152
 Fourierova transformacija, 100
 integral, 118
 invarianten signal, 106, 128, 185
 linearnost, 106, 113
 odvod, 114
 periodičnih signalov, 128
 podobnost, 107
 posplošena, 119
 premik po času, 108
 premik po frekvenci, 111
 razširjen zapis, 102
 Fourierova vrsta, 57, 127, 213
 kompleksna, 57
 konvergenca, 57
 zadostni pogoji, 58
 realna, 60, 63, 64
 realni signali, 59
 frekvenčna širina, 225
 frekvenčna predstavitev, 61
 frekvenčni razmak, 228, 231
 frekvenčno območje
 premik, 112
 frekvenca
 krožna, 197, 200
 modulacijska, 112
 nosilna, 112
 osnovna, 56, 68
 mnogokratnik, 68
 osnovna harmonska, 56, 128, 213
 relativna, 165
 frekvenca vzorčenja
 Gaborova, 219
 Shannon-ova, 219
 funkcija delta, 123, 125, 126, 128, 152,
 153, 181, 182, 184–186, 239
 implicitna definicija, 123, 125
 spektralna lastnost, 123

tipalna lastnost, 125

G

gostota verjetnosti, 165, 169, 171, 177
 govor, 9, 145, 197, 202
 detekcija zvenčih delov, 202
 fonem, 202
 frekvenčni obseg, 202
 glas, 145, 202, 227
 nezveneči, 202
 zveneči, 202
 intonacija, 202, 203
 izgovorjava, 202
 kodiranje sporočil, 202
 kvantizacija, 226
 nestacionaren signal, 226
 periodična komponenta, 202
 posnetki, 144
 razpoznavanje, 144, 202
 samoglasniki, 202
 sinteza, 202
 sistem za določanje intonacije, 205
 vzorčenje, 203
 zveneč, 155
 zvezen proces, 205

H

Haarove temeljne funkcije, 43 – 47
 lokalna odvisnost, 45
 vrednost koeficienta, 45

I

IDFT, 231
 IFFT, 231
 imaginarni spekter
 neperiodični signali, 101
 periodični signali, 61
 informacija, 115
 interval vzorčenja, 211, 225, 229, 240
 inverzna diskretna Fourierova transfor-
 macija, 231, 236, 237
 periodičnost, 233
 inverzna Fourierova transformacija, 100,
 119, 162
 linearnost, 106

K

kepstralna analiza, 197

- kompleksni spekter
 - neperiodični signali, 101
 - realni, 102
 - periodični signali, 61, 67
 - konvolucija
 - neperiodičnih signalov, 146, 190, 192, 234, 235
 - enota, 152, 153
 - frekvenčna predstavitev, 147
 - premik, 146
 - simetričnost, 146, 190
 - zveznost, 147
 - periodičnih signalov, 85
 - enota, 92
 - frekvenčna predstavitev, 86
 - periodičnost, 85
 - simetričnost, 86
 - korelacija
 - neperiodičnih signalov, 131
 - periodičnih signalov, 70
 - antisimetričnost, 72
 - enota, 92
 - frekvenčna predstavitev, 72
 - periodičnost, 71
 - predstavitev s skalarnim produktom, 71
 - zveznost, 74
 - uporaba, 197
 - korelacijska funkcija, 168, 169, 171
 - korelacijski koeficient, 168
 - normiran, 168
 - kovariančna funkcija, 170, 171
 - križna korelacija
 - naključnih signalov, 192, 198, 200
 - neperiodičnih signalov, 131, 140
 - antisimetričnost, 138
 - enota, 152
 - frekvenčna predstavitev, 138
 - identifikacija, 140
 - podobnost, 139, 140, 143
 - poravnava, 140, 144, 146
 - zveznost, 140
 - periodičnih signalov, 70, 84, 201
 - antisimetričnost, 84
 - frekvenčna predstavitev, 84
 - periodičnost, 84
 - stacionarnih naključnih signalov, 177
 - antisimetričnost, 178
 - Fourierova transformacija, 178
 - inverzna Fourierova transformacija, 178
 - limitna vrednost, 178
 - Wienerjev izrek, 178
 - zveznost, 178
 - kriterijska funkcija, 20, 166
 - krivulja
 - ravninska, 117
 - krožna frekvenca, 49
 - kvantizacija, 15, 211, 221
 - število bitov, 225
 - linearna, 222
 - nelinearna, 227
 - kvantizacijski razmik, 222, 225
- L**
- linearna kombinacija
 - neodvisnost koeficientov, 34
 - optimalne vrednosti koeficientov, 32, 34
 - linearni stacionarni sistem, 188
 - impulzni odziv, 193, 235
 - linearnost, 188, 190
 - odziv na enotin impulz, 189, 235, 236
 - prevajalna funkcija, 190, 192, 234, 235
 - spekter amplitudne gostote, 192
 - princip vzročnosti, 189, 236
 - sorazmernost, 188, 189
 - stacionarni naključni vhodni signal, 191
 - stacionarnost, 189
- M**
- maksimalna napaka, 29
 - matematično upanje, 163, 166, 169
 - korelacijska funkcija, 168
 - naključna spremenljivka, 163
 - matrike
 - Hadamardove, 42
 - ortogonalne, 42
 - metrika, 27
 - moč
 - povprečna, 12, 13, 20, 21, 23, 29, 35, 76, 78, 80, 159, 161, 162

trenutna, 12
močnostni spekter, 78, 82

N

naključni proces, 158, 163
ergodičen, 174, 176
kvazi ergodičen, 174, 176
Poissonov, 178, 181
stacionarni, 170, 175
v širšem smislu, 170
v strogem smislu, 170
statistično opisovanje, 163
tok dogodkov, 178, 179, 181, 184,
185
naključni vir, 159
naravni jezik, 202
fonetične lastnosti, 202
prozodične lastnosti, 202
norma, 27, 139

O

obdelava z okensko funkcijo, 153
oddajnik, 9
odziv
naključni, 158
okenska funkcija, 120, 153
Hammingovo okno, 112, 154, 156
pravokotno okno, 154, 156
trikotno okno, 154
ortogonalnost, 30, 221

P

Parsevalova enačba
neperiodični signali, 134
periodični signali, 78
perioda, 11
daljšanje, 98, 99
osnovna, 11, 56
periodična funkcija delta, 91, 92, 201,
239
Fourierova transformacija, 128
kompleksni spekter, 93
Poissonov val, 160, 198
avtokorelacija, 161
polarni zapis, 61
porazdelitev
amplitud, 173
diskretna, 166, 169, 176, 177, 179

Gaussova, 104
normalna, 104
Poissonova, 179
zvezna, 165, 169, 170, 175–177

postopek

Gramm in Schmidt, 39
iterativni, 39

povprečje

časovno, 172–175
vzorčno, 163, 166, 174, 175
drugega reda, 176

približek, 18, 28, 30, 31, 37, 39, 238

ekonomičnost določanja, 34
kvadrat norme, 31
kvaliteta, 28, 35
matematični model, 28
optimalna izbira, 29, 31
postopek določanja, 36
potek, 37

Q

QRS, 46, 118

R

radar, 197
razdalja, 27, 30, 139, 140
razmak vzorčenja, 235
razmerje signal/šum, 225, 226
linearna ocena, 226
realni diskretni spektri, 229
realni spekter
neperiodični signali, 101
periodični signali, 61
rekonstrukcija signala, 218, 219

S

sekvenčna ureditev, 43
signal
koristni del, 115
kvantizacijske napake, 223
amplitudno omejen, 223
potek, 223
povprečna moč, 224, 225
motilni, 198
napake, 19, 30, 31, 37
potek, 38
signali
časovno omejeni, 220, 228

- akustični, 144, 202
 - amplitudno omejeni, 224
 - definicija, 9
 - deterministični, 158, 159
 - digitalna oblika, 227
 - spekter, 227
 - digitalni, 16, 211, 228, 229, 235
 - število vzorcev, 228
 - ocena spektra, 228
 - periodični, 233
 - določljivostni, 11
 - energijski, 13, 159, 193
 - fizikalno realni, 10
 - frekvenčno omejeni, 212, 220, 224
 - izhodni, 188
 - kvantizirani, 15, 225
 - matematični model, 16
 - močnostni, 13, 183, 185
 - naključni, 11, 158, 159
 - število realizacij, 172
 - beli šum, 181, 183, 185, 193, 225
 - deterministične karakteristike, 159
 - funkcijski izraz, 176
 - hkratna realizacija, 163, 166
 - kompleksni, 163
 - linearna odvisnost, 168
 - močnostni, 186
 - ne-stacionarni, 202
 - odvisnost, 166, 169, 176, 183, 198
 - Poissonov val, 179
 - Poissonovi, 179, 184, 185, 193, 194
 - realizacija, 161, 163, 175
 - realni, 163
 - srednja vrednost, 159, 169
 - stacionarni, 11, 14, 159, 179
 - statistične lastnosti, 163
 - varianca, 159
 - vzorčno povprečje, 168, 171
 - neperiodični, 11
 - periodična komponenta, 196, 198, 201, 202
 - potek, 201
 - periodični, 11, 14, 56
 - povprečna moč, 14
 - prirejeni, 173
 - statistične lastnosti, 159
 - teoretični modeli, 10
 - vhodni, 188, 235
 - vzorčeni, 15, 216
 - zajemanje, 211
 - sinusno nihanje, 50, 79, 80, 82, 99, 124
 - amplituda, 62
 - amplitudna gostota, 102
 - fazni zamik, 62, 102
 - kompleksno, 60, 99
 - skalarni produkt, 24, 26, 31, 131, 139
 - lastnosti, 26
 - razdalja, 139
 - sluh, 202
 - spekter
 - močnostne gostote, 183
 - vzorčenega signala, 216
 - spekter amplitudne gostote
 - neperiodični signali, 101, 102, 109
 - spekter močnostne gostote
 - naključni signali, 163, 179, 181, 184, 185, 194
 - signal kvantizacijske napake, 224, 225
 - spektralna predstavitev, 61, 100
 - črtasta, 68, 98
 - amplitudna gostota, 99
 - diskretna, 68
 - periodični signali
 - relani, 64
 - zvezna, 98, 99
 - sprejemnik, 9
 - središčno izrezovanje, 204, 205
 - srednja absolutna napaka, 29
 - srednja kvadratna napaka, 20, 23, 29, 35–37, 166, 167
 - najmanjša vrednost, 32, 34, 167
 - zaporedje, 35
 - limita, 35
 - stacionarnost, 11, 159
 - statistična analiza, 163
- Š
- število bitov kvantizatorja, 222
 - število kvantizacijskih nivojev, 222
 - šum, 9, 115, 119
 - kvantizacijski, 115, 118
 - visokofrekvenčni, 115

T

temeljne funkcije, 28, 39
 časovno neomejeni intervali, 54
 Chebyshevi polinomi, 48
 Gegenbauerjevi polinomi, 48
 Haarove, 43, 46
 lokalna odvisnost, 45
 Hermitovi polinomi, 48
 Jacobijevi polinomi, 48
 kardinalne, 215
 kompleksne, 50
 Laguerreovi polinomi, 48
 Legendrovi polinomi, 47
 linearna kombinacija, 29
 linearno neodvisne, 39
 linerana neodvisnost, 32
 območje ortogonalnosti, 50 – 53
 ortogonalni polinomi, 47, 221
 ortogonalnost, 33
 ortonormalnost, 33, 39
 periodične, 49, 56
 polno ortogonalno zaporedje, 36
 polno zaporedje, 36, 41, 43, 47, 49,
 50, 54
 sinusna nihanja, 50
 sinusne, 49
 kompleksne, 50, 56
 realne, 60
 Walsheve, 41 – 43, 46 – 47
 teorija signalov, 9

U

ukrivljenost, 117, 118
 fleksijska, 117
 povprečna absolutna torzijska, 117
 torzijska, 117

V

valčna transformacija, 47
 VCG, 116, 117
 vektorski prostor, 25, 27, 29
 metrični, 27
 neperiodični signali, 131, 134
 normiran, 27
 periodični signali, 78
 Schwartzova neenačba, 78, 134
 vzorčenje, 15, 43, 211, 236
 govora, 203

s stalnim časovnim razmakom, 211
 vzorčevalna funkcija, 216

W

Walsheve temeljne funkcije, 41 – 43, 46
 – 47
 sekvenca, 43
 kodiranje, 43
 Wavelet Transform, 47
 Wiener Norbert, 162, 187

Z

zmnožek signalov
 frekvenčna predstavitev, 147